517.91
Л 298

Исчисленіе

конечныхъ разностей

Лекціи
профессора Лахтина

Москва, 1901 года

Исчисленіе конечныхъ разностей по своему характеру и методу занимаетъ среднее положеніе между анализомъ и теоріей чиселъ. По своимъ пріемамъ оно напоминаетъ теорію чиселъ, но по своимъ приложеніямъ и задачамъ имѣетъ главнымъ образомъ въ виду цѣли анализа. Въ этомъ исчисленіи приходится имѣть дѣло съ конечнымъ приращеніемъ функціи для конечнаго приращенія аргумента, и всегда можно дѣло повести къ тому, чтобы приращеніемъ аргумента была единица, - здѣсь рѣзко обнаруживается числовой характеръ исчисленія конечныхъ разностей. Въ дифференціальномъ исчисленіи тоже разсматривается приращеніе ф-ій, но для безконечно малаго приращенія аргумента, поэтому дифференціальное исчисленіе соотвѣтствуетъ какъ бы предѣльному случаю; какъ предѣльный случай, диффер. исчисленіе проще исчисленія конечныхъ разностей, выводы его болѣе простые, симметричные; вслѣдствіе этого дифферен-

ціальное исчисленіе развилось быстрѣе. Начало исчисленія конечныхъ разностей положено Эйлеромъ въ 18 вѣкѣ, но въ самой исторіи его нѣтъ такихъ выдающихся моментовъ, какъ въ дифференціальномъ исчисленіи; поэтому на исторіи мы не будемъ останавливаться и приступимъ прямо къ сущности дѣла.

---

§ 1. Понятіе о конечной разности и объ измѣненномъ значеніи функціи.

Пусть дана функція $f(x)$, непрерывная или числовая - безразлично; дадимъ x приращеніе h, получается $f(x+h)$, вычтемъ отсюда $f(x)$ и полученное приращеніе ф-іи обозначимъ, какъ и въ дифференціальномъ исчисленіи:

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x),$$

разница только въ томъ, что въ исчисленіи конечныхъ разностей h все время остается конечной величиной, значеніе которой опредѣляется условіями задачи; всегда можно перемѣнное преобразовать такъ, чтобы приращеніе равнялось единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = ht$, тогда $f(x) = f(ht)$; давая t

ціальное исчисленіе развилось быстрѣе. Начало исчисленія конечныхъ разностей положено Эйлеромъ въ 18 вѣкѣ, но въ самой исторіи его нѣтъ такихъ выдающихся моментовъ, какъ въ дифференціальномъ исчисленіи; поэтому на исторіи мы не будемъ останавливаться и приступимъ прямо къ сущности дѣла.

---

§ 1. Понятіе о конечной разности и объ измѣненномъ значеніи функціи.

Пусть дана функція $f(x)$, непрерывная или числовая - безразлично; дадимъ x приращеніе h, получается $f(x+h)$, вычтемъ отсюда $f(x)$ и полученное приращеніе ф-іи обозначимъ, какъ и въ дифференціальномъ исчисленіи:

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x),$$

разница только въ томъ, что въ исчисленіи конечныхъ разностей h все время остается конечной величиной, значеніе которой опредѣляется условіями задачи; всегда можно перемѣнное преобразовать такъ, чтобы приращеніе равнялось единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = ht$, тогда $f(x) = f(ht)$; давая t

приращеніе, равное единицѣ, мы тѣмъ самымъ x увеличиваемъ на h; слѣдовательно, разсматривая $f(ht)$ какъ функцію t, мы по отношенію къ перемѣнному t будемъ имѣть дѣло съ приращеніемъ, равнымъ единицѣ. Вслѣдствіе этого можно съ самаго начала условиться считать приращеніе равнымъ единицѣ. Такъ иногда и дѣлаютъ; это не есть уменьшеніе общности; но безъ особенной надобности мы этого не станемъ дѣлать, и только въ самыхъ сложныхъ выводахъ будемъ считать h за единицу.

Въ исчисленіи конечныхъ разностей принято такое обозначеніе ф-іи:

$$f(x) = U_x,$$

т. е. аргументъ пишется внизу буквы; тогда

$$\Delta U_x = U_{x+h} - U_x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Правая часть равенства (1), вообще говоря, есть опять функція x; отъ нея можемъ образовать новую разность, она называется второй разностью или разностью второго порядка и обозначается:

$$\Delta^2 U_x = U_{x+2h} - U_{x+h} - U_{x+h} + U_x,$$

или сдѣлавъ приведеніе:

$$\Delta^2 U_x = U_{x+2h} - 2U_{x+h} + U_x.$$

Отъ этого выраженія можемъ снова образовать разность, такъ называемую третью разность или разность 3го порядка отъ U_x, а именно:

$$\Delta^3 U_x = U_{x+3h} - 2U_{x+2h} + U_{x+h} - U_{x+2h} + 2U_{x+h} - U_x =$$
$$= U_{x+3h} - 3U_{x+2h} + 3U_{x+h} - U_x$$

и т. д.

Перепишемъ всѣ полученныя формулы:

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} \Delta U_x = U_{x+h} - U_x\ ; \\ \Delta^2 U_x = U_{x+2h} - 2U_{x+h} + U_x\ ; \\ \Delta^3 U_x = U_{x+3h} - 3U_{x+2h} + 3U_{x+h} - U_x\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Самый процессъ прибавленія къ x приращенія принято обозначать особымъ символомъ D, такъ что

$$U_{x+h} = DU_x \ldots (3)$$

Это (значитъ) значеніе U_{x+h} называется измѣненнымъ значеніемъ функціи. Понятно, что и эту операцію D можно повторять нѣсколько разъ; тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} DU_x = U_{x+h}\ ; \\ D^2U_x = U_{x+2h}\ ; \\ D^3U_x = U_{x+3h}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots (4)$$

Символы D и Δ связаны между собой весьма просто; возьмемъ равенство (1), его можно изобразить такъ:

$$\Delta U_x = DU_x - U_x .$$

Чтобы изобразить эту формулу въ болѣе простомъ видѣ, условились представлять ее въ символической формѣ, вынося символически U_x за скобки:

$$\Delta U_x = (D-1)U_x .$$

Смыслъ этого символа такой: надо раскрыть скобки, какъ будто рѣчь шла о простомъ умноженiи, приставляя множителемъ U_x непремѣнно справа. Это соотношенiе справедливо для всякой ф-iи U_x; чтобы это выразить, опускаютъ эту величину U_x и пишутъ такъ:

$$\Delta = D - 1 \dots (5)$$

Смыслъ этого, чисто символическаго равенства, такой: прибавивъ съ правой стороны каждаго члена символически множителемъ какую-нибудь ф-iю U_x, получаемъ тождество (1).

Возьмемъ (1) формулу, перенесемъ членъ U_x влѣво, она приметъ видъ:

$$U_{x+h} = \Delta U_x + U_x ,$$

или на основанiи равенства (3):

$$DU_x = \Delta U_x + U_x .$$

Поступаемъ, какъ въ предшествующемъ случаѣ, вынося U_x за скобки:

$$DU_x = (\Delta+1)U_x,$$

или опуская снова U_x:

$$D = \Delta + 1 \ldots\ldots (6)$$

Это символическое равенство надо понимать въ томъ же смыслѣ, какъ и равенство (5). Сравнивая (5) и (6), мы видимъ, что равенство (6) было бы слѣдствіемъ равенства (5), если бы рѣчь шла не о символѣ дѣйствій, а объ обыкновенныхъ алгебраическихъ количествахъ.

§2. Выраженіе $n^{й}$ разности (или разности n порядка) черезъ различныя измѣненныя значенія функціи.

Возьмемъ равенство (2) прошлаго §-а. Члены въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ представляютъ собою различныя измѣненныя значенія функціи. Согласно формуламъ (4) прошлаго же §-а ихъ можно (замѣнить) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_x &= DU_x - U_x; \\ \Delta^2 U_x &= D^2U_x - 2DU_x + U_x; \\ \Delta^3 U_x &= D^3U_x - 3D^2U_x + 3DU_x - U_x; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Подмѣтивъ законъ составленія коэффиціэнтовъ, можно составить общую

формулу для $n^{ой}$ разности отъ U_x; но всего проще это сдѣлать, прибѣгая къ символической формѣ, какъ въ концѣ прошлаго §-а. Вынесемъ въ правыхъ частяхъ равенствъ (1) U_x символически за скобку; равенства примутъ видъ:

$$\Delta U_x = (D-1)U_x ;$$
$$\Delta^2 U_x = (D^2-2D+1)U_x ;$$
$$\Delta^3 U_x = (D^3-3D^2+3D-1)U_x ;$$

. . . .

. . . .

Разсматривая символическія выраженія, стоящія въ скобкахъ, замѣчаемъ, что если бы это были не символы дѣйствій, а символы количествъ, то они представляли бы собою различныя степени двучлена $D-1$; въ самомъ дѣлѣ, во второмъ равенствѣ символическая скобка есть квадратъ отъ $D-1$, а въ третьемъ равенствѣ — кубъ отъ $D-1$, слѣдовательно символически тѣ же равенства перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_x &= (D-1)U_x, \\ \Delta^2 U_x &= (D-1)^2 U_x, \\ \Delta^3 U_x &= (D-1)^3 U_x, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \text{по аналогіи:}& \\ \Delta^n U_x &= (D-1)^n U_x. \end{aligned}\right\} \dots\dots (2)$$

Въ раскрытой формѣ, не символической, эта послѣдняя формула представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta^n U_x = D^n U_x - n_1 D^{n-1} U_x + n_2 D^{n-2} U_x - n_3 D^{n-3} U_x + \dots (-1)^{n-1} n_{n-1} D U_x + (-1)^n U_x,$$

гдѣ $n_1, n_2 \dots$ биноміальные коэффиціэнты. Для доказательства справедливости этого равенства, надо прибѣгнуть къ доказательству отъ n къ $n+1$, т.е., допустивши справедливость написанной формулы, доказать, что она непремѣнно будетъ справедлива для слѣдующаго $n+1$ порядка разности. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить слѣдующую разность, надо найти первую разность отъ правой части послѣдняго равенства, т.е. въ этой правой части дать x приращеніе h или, что то же, надъ каждымъ членомъ выполнить дѣйствіе D, а затѣмъ вычесть изъ результата эту правую часть, получится:

$$\Delta^{n+1} U_x = D^{n+1} U_x - n_1 D^n U_x + n_2 D^{n-1} U_x - n_3 D^{n-2} U_x + \dots + (-1)^n D U_x -$$
$$- D^n U_x + n_1 D^{n-1} U_x - n_2 D^{n-2} U_x + \dots (-1) D U_x + (-1)^{n+1} U_x;$$

$$\Delta^{n+1} U_x = D^{n+1} U_x - (n+1)_1 D^n U_x + (n+1)_2 D^{n-1} U_x - (n+1)_3 D^{n-2} U_x + \dots$$
$$+ (-1)^n (n+1)_n D U_x + (-1)^{n+1} U_x,$$

(причемъ $n_1 + 1 = (n+1)_1$; $n_2 + n_1 = (n+1)_2$ и т.д. пишемъ на основаніи свойства биноміальныхъ коэффиціэнтовъ). Формула эта показываетъ, что наше допущеніе оправдалось и для разности $n+1$ порядка, а такъ какъ справед-

ливость теоремы для первыхъ 3 порядковъ была обнаружена, то мы вправѣ сказать, что теорема справедлива для всякаго порядка, т. е. имѣютъ мѣсто равенства (2) для какого-угодно вида функціи; послѣднее изъ этихъ равенствъ и даетъ отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ заглавіи §-а.

Возьмемъ только что выведенныя формулы (2). Онѣ справедливы для какой угодно функціи U_x; чтобы это выразить, мы поступимъ, какъ въ прошломъ §-ѣ, опуская этотъ множитель U_x:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= D-1; \\ \Delta^2 &= (D-1)^2; \\ \Delta^3 &= (D-1)^3; \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ \Delta^n &= (D-1)^n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Понимать это надо такъ же, какъ и формулы 5 и 6 прошлаго §-а, а именно: приставивъ съ правой стороны формулы, какъ въ лѣвой, такъ и въ правой части какую-угодно функцію U_x и раскрывъ скобки, какъ будто рѣчь шла о простыхъ алгебраическихъ перемножающихся выраженіяхъ, получаемъ тождественное равенство.

Ясно, что равенства (3) получаются изъ перваго равенства этой группы или, что то же, изъ равенства (5) прошлаго §-а, возводя его во всевозможныя степени.

§ 3. Выраженіе n-го значенія функціи черезъ разности различныхъ порядковъ (задача, обратная предыдущей)

Въ § 1 мы нашли соотношеніе

$$DU_x = \Delta U_x + U_x \ldots \quad (1)$$

Надъ обѣими частями этого равенства совершимъ ту же самую операцію D; будемъ имѣть:

$$D^2 U_x = D(\Delta U_x + U_x).$$

Пользуясь свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ 1-мъ, мы можемъ вычислить правую часть:

$$D^2 U_x = \Delta(\Delta U_x + U_x) + \Delta U_x + U_x,$$

или:

$$D^2 U_x = \Delta^2 U_x + 2\Delta U_x + U_x.$$

Надъ полученнымъ выраженіемъ снова совершаемъ операцію D, получимъ:

$$D^3 U_x = D(\Delta^2 U_x + 2\Delta U_x + U_x).$$

Для вычисленія правой части, примѣняемъ свойство, выраженное въ равенствѣ (1), такъ что:

$$D^3 U_x = \Delta(\Delta^2 U_x + 2\Delta U_x + U_x) + \Delta^2 U_x + 2\Delta U_x + U_x$$

или:

$$D^3 U_x = \Delta^3 U_x + 3\Delta^2 U_x + 3\Delta U_x + U_x.$$

Подобнымъ образомъ мы можемъ идти и дальше; причемъ найдемъ выраженіе для $D^n U_x$; задача наша въ составленіи общей формулы. Въ правыхъ частяхъ полученныхъ формулъ выносимъ U_x символически за скобки:

$$D U_x = (\Delta+1) U_x,$$
$$D^2 U_x = (\Delta^2+2\Delta+1) U_x;$$
$$D^3 U_x = (\Delta^3+3\Delta^2+3\Delta+1) U_x,$$

. . . .

Выраженія въ скобкахъ представляли бы собою различныя степени двучлена $\Delta+1$, если бы Δ было символомъ количествъ. Такъ же, какъ и въ предшествующихъ выводахъ, условимся представлять скобки символически въ видѣ степеней:

$$\left.\begin{aligned} D U_x &= (\Delta+1) U_x, \\ D^2 U_x &= (\Delta+1)^2 U_x, \\ D^3 U_x &= (\Delta+1)^3 U_x, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \text{по аналогіи:} & \\ D^n U_x &= (\Delta+1)^n U_x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

или въ раскрытой формѣ:

$$D^n U_x = \Delta^n U_x + n_1 \Delta^{n-1} U_x + n_2 \Delta^{n-2} U_x + n_3 \Delta^{n-3} U_x + \ldots n_{n-1} \Delta U_x + U_x.$$

Это равенство, написанное по аналогіи; чтобы доказать его справедливость, надо опять прибѣгнуть къ доказательству отъ

n къ $n+1$. Допустимъ, что оно справедливо для даннаго числа n и докажемъ, что оно будетъ справедливо для слѣдующей степени. Съ этой цѣлью къ обѣимъ частямъ равенства примѣнимъ свойство, выражаемое равенствомъ (1), найдемъ:

$$D^{n+1}U_x = \Delta^{n+1}U_x + n_1\Delta^n U_x + n_2\Delta^{n-1}U_x + n_3\Delta^{n-2}U_x + \ldots + \Delta U_x +$$
$$+ \Delta^n U_x + n_1\Delta^{n-1}U_x + n_2\Delta^{n-2}U_x + \ldots n_{n-1}\Delta U_x + U_x;$$

первую и вторую строку складываемъ, пользуясь тѣмъ же свойствомъ биноміальныхъ коэффиціентовъ:

$$D^{n+1}U_x = \Delta^{n+1}U_x + (n+1)_1\Delta^n U_x + (n+1)_2\Delta^{n-1}U_x + (n+1)_3\Delta^{n-2}U_x + \ldots + (n+1)_n\Delta U_x + U_x,$$

формула та же самая, только n на единицу увеличилось. Такъ какъ для первыхъ двухъ степеней формула вѣрна, то она справедлива для всякой степени.

Такъ же, какъ въ прошломъ параграфѣ, можно опустить U_x, и тогда равенства получатъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} D &= \Delta + 1, \\ D^2 &= (\Delta+1)^2, \\ D^3 &= (\Delta+1)^3, \\ &\ldots\ldots \\ D^n &= (\Delta+1)^n. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Сравнивъ между собою равенства (3) настоящаго и прошлаго §-овъ, мы видимъ,

что эти равенства были бы простыми алгебраическими слѣдствіями, будь D и Δ алгебраическими количествами; мы видимъ, что и надъ символами D и Δ можно совершать дѣйствія, подобно какъ въ алгебрѣ.

§4. Символическая зависимость между символами D, Δ и $\frac{d}{dx}$

Возьмемъ формулу Тейлора:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}\frac{d}{dx}f(x)+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2}{dx^2}f(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3}{dx^3}f(x)+\ldots (1),$$

справедливую только при условіи сходимости безконечнаго ряда. Введемъ такое же обозначеніе, какъ въ прошлыхъ параграфахъ, обозначивъ $f(x)$ черезъ U_x, и въ правой части равенства (1), какъ и раньше, U_x вынесемъ символически за скобки, получимъ:

$$U_{x+h}=\left(1+\frac{h}{1}\frac{d}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d}{dx}\right)^3+\ldots\right)U_x;\ldots (2)$$

Лѣвая часть этого равенства есть DU_x — измѣненное значеніе функціи; выраженіе въ скобкахъ въ правой части построено совершенно такъ же, какъ разложеніе въ безконечный рядъ показательной функціи e^x, причемъ вмѣсто x стоитъ $h\frac{d}{dx}$. Слѣдовательно, мы можемъ переписать такъ:

$$DU_x=e^{h\frac{d}{dx}}U_x\ldots (3)$$

Эта формула можетъ быть еще нѣсколько упрощена, если опустить U_x, получимъ:

$$D = e^{h\frac{d}{dx}} \ldots\ldots (4)$$

Формула (4) примѣнима постольку, поскольку рядъ (1) сходящійся, т.е. она примѣнима не ко всякой ф-іи U_x, а только при условіи сходимости получаемаго ряда. Эта формула устанавливаетъ связь между символами D и $\frac{d}{dx}$, но такъ какъ мы видѣли, что $D = \Delta + 1$, то формула (4) дастъ связь между Δ и $\frac{d}{dx}$ въ такомъ видѣ:

$$\Delta + 1 = e^{h\frac{d}{dx}} \ldots (5)$$

Еслибы въ формулѣ (5) символы Δ и $\frac{d}{dx}$ были символами количественными, а не символами дѣйствій, то эту формулу можно было бы логарифмировать по неперовой системѣ, и получилось бы равенство:

$$h\frac{d}{dx} = lg(\Delta + 1).$$

Далѣе, $lg(\Delta+1)$ можно разложить по степенямъ Δ, тогда получится слѣдующее:

$$h\frac{d}{dx} = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots \quad (6)$$

Приставивъ съ правой стороны обѣихъ частей символически ф-ію U_x, мы получимъ:

$$h\frac{d}{dx}U_x = \Delta U_x - \frac{\Delta^2}{2}U_x + \frac{\Delta^3 U_x}{3} - \frac{\Delta^4 U_x}{4} + \ldots (7)$$

Формула (7) можетъ быть справедлива только при условіи сходимости ряда въ правой ея части. Если въ эту правую часть вмѣсто конечной разности Δ вставить ея выраженіе изъ формулы Тейлора (2) и сгруппировать члены,

то окажется, что дѣйствительно всѣ степени h, кромѣ первой, сократятся и останется только одинъ членъ $h\frac{d}{dx}U_x$, такъ что равенство (7) дѣйствительно оказывается тождествомъ. Въ такомъ случаѣ формула (6) есть выраженіе символа дифференцированія черезъ символъ конечной разности.

§5. Основныя свойства конечной разности.

1. Конечная разность отъ постояннаго равна нулю

$$\Delta C = 0.$$

2. Конечная разность періодической ф-іи съ періодомъ h равна нулю.

Пусть $\omega(x)$ есть функція съ періодомъ h, такъ что

$$\omega(x+h) = \omega(x),$$

отсюда:

$$\Delta\omega(x) = \omega(x+h) - \omega(x) = 0.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знакъ конечной разности

$$\Delta C.U_x = C.\Delta U_x$$

4. Конечная разность алгебраической суммы нѣсколькихъ ф-ій равна алгебраической суммѣ разностей отъ этихъ ф-ій:

$$\Delta(U_x + V_x - W_x) = \Delta U_x + \Delta V_x - \Delta W_x.$$

5. Слѣдующее свойство заключается въ выраженіи конечной разности отъ произведенія двухъ функцій, — выведемъ его:

$$\Delta U_x \cdot V_x = U_{x+h} V_{x+h} - U_x V_x =$$
$$= U_{x+h} \cdot V_{x+h} - U_x \cdot V_{x+h} + U_x \cdot V_{x+h} - U_x \cdot V_x =$$
$$= V_{x+h} \cdot \Delta U_x + U_x \cdot \Delta V_x$$

Это формула конечной разности отъ произведенія.

6. Слѣдующее свойство заключается въ выраженіи конечной разности частнаго:

$$\Delta \frac{U_x}{V_x} = \frac{U_{x+h}}{V_{x+h}} - \frac{U_x}{V_x} = \frac{U_{x+h} V_x - V_{x+h} U_x}{V_{x+h} \cdot V_x} =$$
$$= \frac{U_{x+h} V_x - U_x \cdot V_x + U_x \cdot V_x - V_{x+h} \cdot U_x}{V_{x+h} \cdot V_x} =$$
$$= \frac{V_x \cdot \Delta U_x - U_x \cdot \Delta V_x}{V_{x+h} \cdot V_x}.$$

§6. Выраженіе конечныхъ разностей простѣйшихъ функцій.

1. Конечная разность степени.

Пусть дана ф-ія x^n, гдѣ n число цѣлое, положительное,

$$\Delta x^n = (x+h)^n - x^n = n_1 h x^{n-1} + n_2 h^2 x^{n-2} + n_3 h^3 x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1} h^{n-1} x + h^n.$$

Въ правой части получается многочленъ, цѣлый относительно x, степени на единицу ниже, чѣмъ степень x, намъ данная. Стар-

шій членъ правой части составляется по такой же формулѣ, какъ дифференціалъ данной ф-іи, гдѣ h соотвѣтствуетъ dx. На этомъ основаніи можно составить вторую разность, — это будетъ многочленъ степени $n-2$, причемъ старшій его членъ будетъ имѣть такой же видъ, какъ второй дифференціалъ отъ x^n, т.е. это будетъ

$$\Delta^2 x^n = n(n-1)h^2 x^{n-2} + \ldots\ldots,$$

такъ же точно:

$$\Delta^3 x^n = n(n-1)(n-2)h^3 x^{n-3} + \ldots\ldots$$

это будетъ многочленъ $n-3$ степени относительно x, и т.д.

$$\Delta^n x^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.\,h^n$$

Это будетъ многочленъ нулевой степени относительно x, т.е. величина постоянная. Слѣдующая конечная разность:

$$\Delta^{n+1} x^n = 0$$

и всѣ дальнѣйшія разности окажутся нулями: $\Delta^{n+2} x^n = 0$;

. . . .

Полученный результатъ можно формулировать словами: дѣйствіе взятія конечной разности понижаетъ на единицу степень многочлена. Конечная разность n порядка отъ многочлена n степени есть постоянное число; конечныя разности порядковъ

высшие степени многочлена, суть нули.

2. Конечная разность факторьяльной функціи съ положительнымъ показателемъ.
Символомъ $x^{(n)}$, при n цѣломъ и положительномъ, обозначается слѣдующее выраженіе:

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)(x-3h)\ldots(x-\overline{n-1}\,h).$$

Такая ф-ія называется факторьяльной ф-іей. Такія выраженія постоянно попадаются въ теоріи сочетаній и теоріи рядовъ. Составимъ конечную разность

$$\Delta x^{(n)} = (x+h)x(x-h)(x-2h)(x-3h)\ldots(x-\overline{n-2}\,h) -$$
$$- x(x-h)(x-2h)(x-3h)\ldots(x-\overline{n-2}\,h)(x-\overline{n-1}\,h) =$$
$$= x(x-h)(x-2h)(x-3h)\ldots(x-\overline{n-2}\,h)(x+h-x+\overline{n-1}\,h);$$
$$\Delta x^{(n)} = nhx(x-h)(x-2h)(x-3h)\ldots(x-\overline{n-2}\,h)$$

Перемѣнный множитель имѣетъ строеніе такое же, какъ данный, но только число множителей убавилось: вмѣсто n стоитъ $n-1$, т.е. это будетъ $x^{(n-1)}$, слѣдовательно формулу можно переписать такъ:

$$\Delta x^{(n)} = hnx^{(n-1)} \ldots (1)$$

Формула показываетъ, что конечная разность отъ факторьяльной ф-іи составляется совершенно по правиламъ диффеpенцированія степени перемѣннаго, гдѣ dx соотвѣтствуетъ h; въ самомъ дѣлѣ, $dx^n = nx^{n-1}dx$, такъ что полная аналогія существуетъ между диффеpенціаломъ степени и конечной раз-

ностью. факторьяльной ф-iи.

Формула (1) позволяетъ найти вторую разность факторьяльной ф-iи, примѣняя къ правой части формулы (1) ту же формулу(1):

$$\Delta^2 x^{(n)} = h^2 n(n-1)x^{(n-2)};$$

$$\Delta^3 x^{(n)} = h^3 n(n-1)(n-2)x^{(n-3)};$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^{n-1} x^{(n)} = h^{n-1} n.(n-1)(n-2)\ldots 2.x^{(1)},$$ причемъ $x^{(1)} = x$;

$$\Delta^n x^{(n)} = h^n . n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1.$$

$\Delta^{n+1} x^{(n)} = 0$, что согласно со сказаннымъ выше, такъ какъ $x^{(n)}$ есть многочленъ $n^{\text{й}}$ степени; всѣ дальнѣйшiя разности равны нулю.

Всякую цѣлую, положительную степень x можно представить, какъ сумму нѣсколькихъ факторьяльныхъ ф-iй:

$$x^{(1)} = x;$$

$x^{(2)} = x(x-h) = x^2 - hx$, откуда:

$$x^2 = x^{(2)} + hx^{(1)};$$

$x^{(3)} = x(x-h)(x-2h) = x^3 - 3hx^2 + 2h^2x$, отсюда:

$$x^3 = x^{(3)} + 3h(x^{(2)} + hx^{(1)}) - 2h^2x^{(1)} =$$

$$= x^{(3)} + 3hx^{(2)} + h^2x^{(1)};$$

. . . .

. . . .

Впослѣдствiи мы выведемъ общую формулу выраженiя x^n черезъ $x^{(n)}, x^{(n-1)}, x^{(n-2)} \ldots x^{(2)}, x^{(1)}$; когда такая формула будетъ выведена, мы будемъ въ состоянiи вычислить разность какого-

угодно порядка отъ x^n.

3. Факторьяльная функція съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ. Символомъ $x^{(-n)}$ обозначается выраженіе:

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}$$

Найдемъ ея разность:

$$\Delta x^{(-n)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h)+\ldots(x+\overline{n-1}\,h)} =$$

$$= \frac{x-x-nh}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)(x+nh)} = -nh\,x^{(-n-1)}.$$

Итакъ
$$\Delta x^{(-n)} = h(-n)x^{(-n-1)} \ldots\ldots (2)$$

Формула совершенно такая же, какъ формула дифференціала отрицательной степени x, такъ что эта формула (2) дополняетъ формулу (1). Пользуясь ею, можемъ найти разности высшихъ порядковъ:

$$\Delta^2 x^{(-n)} = h^2(-n)(-n-1)x^{(-n-2)};$$
$$\Delta^3 x^{(-n)} = h^3(-n)(-n-1)(-n-2)x^{(-n-3)};$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

4. Показательная функція. Возьмемъ a^x и составимъ ея разность:

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x;$$
$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1) \ldots\ldots (3)$$

Дѣйствіе взятія разности отъ показательной ф-іи a^x таково, что эта показательная ф-ія a^x множится на нѣкоторые по-

стоянное число a^h-1; отсюда легко найти и слѣдующія разности:

$$\Delta^2 a^x = a^x(a^h-1)^2;$$
$$\Delta^3 a^x = a^x(a^h-1)^3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вообще:

$$\Delta^n a^x = a^x(a^h-1)^n.$$

5. Конечная разность отъ $\sin x$. Выводъ такой же, какъ въ дифференціальномъ исчисленіи. Возьмемъ ф-ію $\sin(x+a)$, гдѣ a какое угодно постоянное число; составимъ ея разность:

$$\Delta \sin(x+a) = \sin(x+h+a) - \sin(x+a) =$$
$$= 2\cos\left(x+a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2};$$
$$\Delta \sin(x+a) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right) \ldots\ldots (4)$$

Полагая въ формулѣ (4) $a=0$, находимъ:

$$\Delta \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \ldots\ldots\ldots (5)$$

Возьмемъ разность отъ обѣихъ частей равенства (5):

$$\Delta^2 \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\,\Delta \sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Чтобы найти эту разность въ правой части, мы пользуемся формулой (4), для чего a приходится положить равнымъ $\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}$:

$$\Delta^2 \sin x = 2^2 \sin^2\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{h}{2}\right).$$

Беремъ разность отъ обѣихъ частей этой формулы и снова примѣняемъ формулу (4), причемъ a будетъ равно $2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{h}{2}$; мы найдемъ:

$$\Delta^3 \sin x = 2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2} + 3\cdot\frac{h}{2}\right);$$

. . . .

$$\Delta^n \sin x = 2^n \sin^n \frac{h}{2} \cdot \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2} + n\cdot\frac{h}{2}\right)$$

6. Разность косинуса. Возьмемъ $\cos(x+a)$ и натянемъ разность:

$$\Delta \cos(x+a) = \cos(x+h+a) - \cos(x+a) =$$

$$= -2\sin\left(x+a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2};$$

$$\Delta \cos(x+a) = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right) \ldots\ldots (6)$$

Полагая $a = 0$, имѣемъ

$$\Delta \cos x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right) \ldots\ldots (7)$$

Понятно, что

$$\Delta^2 \cos x = 2^2 \sin^2\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{h}{2}\right);$$

. . . .

и вообще: $\Delta^n \cos x = 2^n \sin^n \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2} + n\cdot\frac{h}{2}\right)$.

§7. Неопредѣленный интегралъ по конечнымъ разностямъ.

Пусть дана ф-iя U_x, составимъ отъ нея конечную разность

$$\Delta U_x = V_x \ldots\ldots (1),$$

гдѣ V_x есть нѣкоторая ф-iя x. Въ предшествующихъ §-ахъ мы говорили о нахожденiи ф-iи V_x по данному U_x; зададимся обратной задачей: нельзя ли найти U_x, зная V_x. По отношенiю къ V_x ф-iя U_x называется интеграломъ по конечнымъ разностямъ и обозначается:

$$U_x = \sum V_x \ldots\ldots (2).$$

Итакъ, интеграломъ отъ ф-іи V_x мы назовемъ всякую ф-ію U_x, удовлетворяющую условію (1) или, въ раскрытой формѣ, условію такому:

$$U_{x+h} - U_x = V_x$$

или наконецъ:

$$U_{x+h} = V_x + U_x \ldots\ldots (3)$$

Изъ анализа извѣстно, что неопредѣленный интегралъ имѣетъ безконечное множество значеній, разнящихся на произвольное постоянное слагаемое, такъ какъ производная отъ постояннаго есть нуль. То же самое по той же причинѣ имѣетъ мѣсто и здѣсь, но только здѣсь произволъ болѣе широкій: вмѣсто произвольнаго постояннаго мы имѣемъ произвольную ф-ію съ періодомъ h; въ самомъ дѣлѣ, пусть U_x удовлетворяетъ равенству (1); возьмемъ ф-ію $U_x + \omega(x)$, гдѣ $\omega(x)$ какая угодно ф-ія съ періодомъ h, составимъ разность этого выраженія, будемъ имѣть:

$$\Delta\{U_x + \omega(x)\} = \Delta U_x + \Delta\omega(x);$$

первое слагаемое правой части на основаніи равенства (1) есть V_x, кромѣ того $\Delta\omega(x) = 0$ (согласно §5), слѣдовательно:

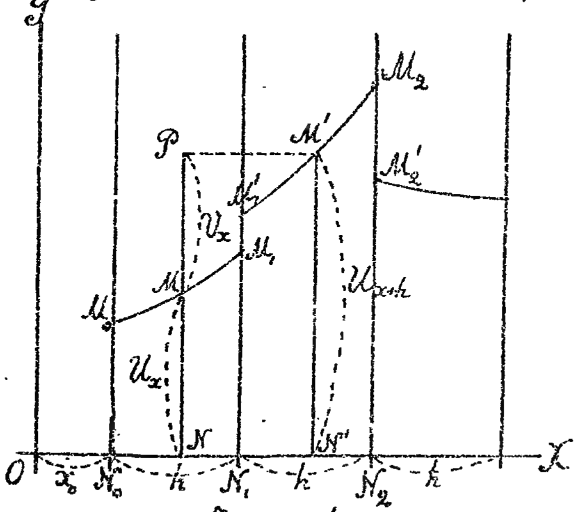
$$\Delta\{U_x + \omega(x)\} = V_x,$$

т.е. $U_x+\omega(x)$ есть интегралъ; поэтому то онъ и называется неопредѣленнымъ.

§ 8. Доказательство существованія интеграла по конечнымъ разностямъ.

Сохранимъ обозначеніе прошлаго §-а. Цѣль наша заключается въ доказательствѣ существованія ф-іи U_x, удовлетворяющей условію (3) прошлаго §-а для всякаго даннаго V_x.

Будемъ изображать теченіе ф-іи въ видѣ кривой линіи, отнесенной къ системѣ прямоугольныхъ осей координатъ (черт. I)



черт. 1.

Возьмемъ совершенно произвольный отрѣзокъ $ON_0=x_0$ и проведемъ черезъ N_0 прямую, параллельную оси Y; откладываемъ отъ N_0 отрѣзокъ N_0N_1, равный h; проводимъ черезъ N_1 прямую параллельно оси Y; снова откладываемъ отрѣзокъ $N_1N_2=h$ и также проводимъ прямую и т.д. Плоскость разобьется на рядъ полосъ, шириною h. Мы докажемъ

жемъ, что существуетъ ф-ія U_x, удовлетворяющая условію (3) и изображаемая въ предѣлахъ первой полосы совершенно произвольной линией M_0M_1. Пусть U_x въ предѣлахъ первой полосы изображается отрѣзкомъ M_0M_1; дадимъ x значеніе, изображаемое отрѣзкомъ ON, чтобы N лежало гдѣ-нибудь между N_0 и N_1; ордината MN, согласно допущенію, будетъ U_x; на продолженіи этой ординаты NM отъ M откладываемъ отрѣзокъ MP, равный V_x; длина NP будетъ равняться V_x+U_x, правой части формулы (3). Въ разстояніи h отъ N вправо беремъ точку N', возставляемъ перпендикуляръ и на немъ откладываемъ отрѣзокъ $N'M'=NP$, по длинѣ равный $V_x+U_x=U_{x+h}$, точка M' есть точка искомой кривой во второй полосѣ; подвигая точку N отъ N_0 къ N_1, мы для каждаго ея положенія выполнимъ такое-же построеніе; точка M' опишетъ нѣкоторую кривую въ предѣлахъ второй полосы $M_1'M_2$. Построивъ этотъ отрѣзокъ $M_1'M_2$ и примѣняя къ нему все сказанное о первомъ отрѣзкѣ, построимъ новый отрѣзокъ въ третьей полосѣ. Подобное же построеніе надо выполнить и въ полосахъ, лежащихъ влѣво отъ первой. Въ результатѣ получится нѣкоторая линія, или непре-

рывная, или разорванная, какъ представлено на чертежѣ. Но гдѣ бы мы ни взяли на ней точку, ордината ея удовлетворитъ условію (3), слѣдовательно такая линія изобразитъ собою искомый интегралъ, — — интегралъ дѣйствительно существуетъ.

§ 9. Основныя свойства интеграла по конечнымъ разностямъ

1. По самому опредѣленію дѣйствіе взятія интеграла по конечнымъ разностямъ есть дѣйствіе, обратное взятію конечной разности; эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, такъ что:

$$\sum \Delta U_x = U_x ;$$

точно такъ же:

$$\Delta \sum U_x = U_x .$$

Чтобы подчеркнуть это свойство, нѣкоторые авторы символъ интеграла по конечнымъ разностямъ изображаютъ въ такомъ видѣ:

$$\sum = \Delta^{-1}$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знакъ интеграла по конечнымъ разностямъ:

$$\sum C . U_x = C . \sum U_x$$

3. Третье свойство заключается въ томъ, что интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ алгебраической суммы нѣсколькихъ ф-iй равенъ алгебраической суммѣ интеграловъ отъ этихъ функцiй:

$$\sum\{U_x + V_x - W_x\} = \sum U_x + \sum V_x - \sum W_x.$$

§10. Интегралы по конечнымъ разностямъ отъ простѣйшихъ ф-iй

1. Факторьяльная ф-iя съ положительнымъ показателемъ.

Возьмемъ формулу, выведенную въ §6:

$$\Delta x^{(n)} = hnx^{(n-1)},$$

въ обѣихъ частяхъ этого равенства n замѣняемъ черезъ $n+1$ и дѣлимъ обѣ части равенства на коэффицiэнтъ при правой части, получается:

$$x^{(n)} = \frac{\Delta x^{(n+1)}}{h(n+1)}.$$

Беремъ интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ обѣихъ частей этого равенства, причемъ постоянный множитель выйдетъ за знакъ интеграла, получится слѣдующее:

$$\sum x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{h(n+1)} \ldots\ldots (1)$$

Формула интеграла по конечнымъ

разностямъ отъ факторьяльной ф-іи; она вполнѣ аналогична формулѣ интеграла степени въ интегральномъ исчисленіи, она бы сдѣлалась совершенно такою же, какъ та, еслибы $h=1$

Этой формулой мы можемъ пользоваться для нахожденія интеграла по конечнымъ разностямъ отъ какой угодно цѣлой и положительной степени; въ самомъ дѣлѣ, мы уже говорили, что какая угодно степень x^n, цѣлая и положительная, выражается черезъ факторьяльныя функціи $x^{(n)}, x^{(n-1)} \ldots\ldots x^{(2)}, x^{(1)}$ въ видѣ цѣлаго многочлена относительно нихъ; дѣло сведется къ почленному интегрированію многочлена, причемъ въ каждомъ членѣ будетъ факторьяльная ф-іе

Примѣръ. Какъ извѣстно: $x^{(1)}=x$; $x^{(2)}=x(x-h)\equiv x^2-hx$; $x^2=x^{(2)}+hx^{(1)}$; поэтому

$$\sum x^2=\sum x^{(2)}+h\sum x^{(1)}=\frac{x^{(3)}}{3h}+\frac{x^{(2)}}{2}$$

2. Факторьяльная ф-іе съ отрицательнымъ показателемъ. Возьмемъ формулу:

$$\Delta x^{(-n)}=h(-n)x^{(-n-1)},$$

замѣнимъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства

n черезъ n-1 и дѣлимъ все равенство на постоянный коэффиціентъ правой части, получится:

$$x^{(-n)}=\frac{\Delta x^{(-n+1)}}{h(-n+1)};$$

беремъ интегралъ отъ обѣихъ частей этого равенства, будемъ имѣть:

$$\sum x^{(-n)}=\frac{x^{(-n+1)}}{h(-n+1)}\ \ldots\ldots(2)$$

формула такая же, какъ формула интегрированія отрицательной степени x.

3. Интегралъ показательной функціи.

Возьмемъ формулу:

$$\Delta a^x=a^x(a^h-1),$$

дѣлимъ обѣ части равенства на постоянный коэффиціентъ въ правой части и беремъ интегралъ отъ обѣихъ частей, получимъ:

$$\sum a^x=\frac{a^x}{a^h-1}\ \ldots\ldots\ \ldots\ (3)$$

4. Возьмемъ формулу

$$\Delta \operatorname{Cos} x=-2\operatorname{Sin}\frac{h}{2}\operatorname{Sin}\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Въ обѣихъ частяхъ этого равенства замѣняемъ x черезъ $x-\frac{h}{2}$ и дѣлимъ обѣ части этого равенства на постоянный коэффиціентъ правой части, получается:

$$\operatorname{Sin} x=\frac{\Delta \operatorname{Cos}\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\operatorname{Sin}\frac{h}{2}};$$

беремъ интегралъ по конечнымъ разно-

стяемъ отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\sum \sin x = \frac{\cos(x-\frac{h}{2})}{2\sin\frac{h}{2}} \ldots\ldots (4)$$

5. Интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ косинуса. Беремъ формулу:

$$\Delta \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

въ обѣихъ частяхъ замѣняемъ x черезъ $x-\frac{h}{2}$ и дѣлимъ все равенство на постоянный коэффиціэнтъ въ правой части, получимъ:

$$\cos x = \frac{\Delta \sin(x-\frac{h}{2})}{2\sin\frac{h}{2}};$$

беремъ интегралъ отъ обѣихъ частей:

$$\sum \cos x = \frac{\sin(x-\frac{h}{2})}{2\sin\frac{h}{2}} \ldots\ldots (5)$$

Вотъ всевозможныя формулы интеграла по конечнымъ разностямъ отъ простѣйшихъ функцій; съ ихъ помощью можно рѣшить множество задачъ.

§ 11. Формула интеграціи по частямъ въ конечныхъ разностяхъ

Возьмемъ формулу конечной разности отъ произведенія, она выражается такъ:

$$\Delta U_x V_x = U_{x+h}\Delta V_x + V_x \Delta U_x \ldots\ldots (1);$$

введемъ обозначеніе: $\Delta U_x = W_x \ldots\ldots (2)$,

тогда: $U_x = \sum W_x$,

$$U_{x+h} = \sum W_{x+h};$$

вставляемъ эти обозначенія въ формулу (1) и перенося первый членъ правой части влѣво, напишемъ правую часть спереди, получится слѣдующее:

$$V_x W_x = \Delta\left\{V_x \sum W_x\right\} - \sum W_{x+h} \cdot \Delta V_x \;;$$

беремъ интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\sum V_x W_x = V_x \sum W_x - \sum\left\{\sum W_{x+h} \cdot \Delta V_x\right\} \quad \ldots (3)$$

Примѣненіе этой формулы то же, что въ интегральномъ исчисленіи.

Разсмотримъ примѣръ:

$$\sum a^x x^{(2)} = x^{(2)} \cdot \frac{a^x}{a^h-1} - \sum \frac{a^{x+h}}{a^h-1} \cdot 2h x^{(1)} =$$

$$= \frac{a^x x^{(2)}}{a^h-1} - \frac{2ha^h}{a^h-1} \sum a^x \cdot x^{(1)}; \quad \sum a^x x^{(1)} = \frac{x \cdot a^x}{a^h-1} -$$

$$- \sum \frac{a^{x+h}}{a^h-1} \cdot h = \frac{x a^x}{a^h-1} - \frac{ha^h}{a^h-1} \sum a^x = \frac{x \cdot a^x}{a^h-1} -$$

$$- \frac{a^{x+h} \cdot h}{(a^h-1)^2};$$ окончательно:

$$\sum a^x x^{(2)} = \frac{a^x x^{(2)}}{a^h-1} - \frac{2hx a^{x+h}}{(a^h-1)^2} + \frac{2h^2 a^{x+2h}}{(a^h-1)^3}$$

§ 12. Опредѣленный интегралъ по конечнымъ разностямъ

Возьмемъ неопредѣленный интегралъ $\sum U_x$ и напишемъ равенство:

$$\sum U_x = V_x + \omega(x) \dots (1),$$

гдѣ $\omega(x)$ періодическая функція съ періодомъ h. Возьмемъ произвольное число a и другое число b такое, чтобы $b-a$ было кратнымъ величины h, т.е.

$$b - a = nh \dots (2)$$

гдѣ n есть цѣлое, положительное число (для теоріи безразлично даже, если $b<a$, лишь бы n было цѣлымъ, но для простоты мы принимаемъ n цѣлымъ и положительнымъ). Пусть ф-ія U_x конечна при всевозможныхъ значеніяхъ x, которыя она способна пріобрѣтать въ промежуткѣ отъ a до b. Вычислимъ величину интеграла (1) для $x=a$, затѣмъ для $x=b$ и вычтемъ одну величину изъ другой. Величина $\omega(x)$ одинакова для a и b, такъ какъ b разнится отъ a на цѣлое число періодовъ; при взятіи разности эти члены сократятся, будемъ имѣть разность двухъ значеній неопредѣленнаго интеграла, которую обозначаютъ особымъ символомъ:

$$\sum_a^b U_x = V_b - V_a$$

и называютъ опредѣленнымъ интеграломъ по конечнымъ разностямъ, a и b — предѣлы опредѣленнаго интеграла; при этомъ

необходимо условіе, чтобы в-а было кратно h, въ противномъ случаѣ символъ не имѣетъ смысла.

§13. Интегралъ по конечнымъ разностямъ, какъ сумма

Оставимъ обозначенія прошлаго §-а, изъ равенства (1) слѣдуетъ, что

$$U_x = \Delta V_x$$

т.е. $V_{x+h} - V_x = U_x \ldots\ (3)$

Равенство (3) есть тождество; полагаемъ $x = a$ и находимъ

$V_{a+h} - V_a = U_a$; полагая тамъ же $x = a+h$,

найдемъ: $V_{a+2h} - V_{a+h} = U_{a+h}$;

при $x = a+2h$: $V_{a+3h} - V_{a+2h} = U_{a+2h}$;

такъ же: $V_{a+4h} - V_{a+3h} = U_{a+3h}$;

- - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - -

при $x = a + \overline{n-1}h$: $V_{a+nh} - V_{a+\overline{n-1}h} = U_{a+\overline{n-1}h}$.

Сложимъ всѣ эти равенства между собою, замѣтивъ, что на основаніи рав (2) $a + nh = b$, произойдутъ сокращенія, и останется:

$$V_b - V_a = U_a + U_{a+h} + U_{a+2h} + U_{a+3h} + \ldots + U_{a+\overline{n-1}h}.$$

Выраженіе въ лѣвой части, согласно опредѣленію, есть опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ a до b, т.е.

$$\sum_a^b U_x = U_a + U_{a+h} + U_{a+2h} + U_{a+3h} + \ldots + U_{a+\overline{n-1}h} \ldots\ (4)$$

Опредѣленный интегралъ по конечнымъ раз-

ностямъ представляя въ видѣ суммы значеній подинтегральной ф-іи; эту сумму, стоящую въ правой части, можно обозначить сокращенно слѣдующимъ символомъ:

$$\mathop{S}_{k=0}^{k=n-1} u_{a+kh}$$

тогда равенство приметъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{a}^{b} u_x = \mathop{S}_{k=0}^{k=n-1} u_{a+kh} \dots \quad (5)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что верхній предѣлъ суммы, стоящей въ правой части равенства (5), не соотвѣтствуетъ вполнѣ верхнему предѣлу опредѣленнаго интеграла по конечнымъ разностямъ, такъ какъ $b = a + nh$, а верхній предѣлъ правой части соотвѣтствуетъ значенію аргумента, равнаго $a + \overline{n-1}h$. Въ интегральномъ исчисленіи существуетъ такая же разница, но только тамъ она по безконечной малости лишняго члена на результатъ не вліяетъ.

Такова связь между интеграломъ по конечнымъ разностямъ и суммой.

§ 14. Примѣненіе интегрированія въ конечныхъ разностяхъ къ суммованію рядовъ.

Пусть данъ какой-нибудь рядъ, ради простоты — конечный; каждый членъ ряда

есть ф-ія номера мѣста, имъ занимаемаго, причемъ этотъ номеръ отъ одного члена къ другому увеличивается на единицу. Всякій такой рядъ можно представить въ видѣ:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots U_{n-1}$$

въ томъ случаѣ, если онъ состоитъ изъ n членовъ. Его можно написать въ видѣ суммы:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots U_{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_{0+k.1} \ldots\ldots (1)$$

Сумма (1) имѣетъ совершенно такой видъ, какъ сумма (5) предъидущаго §-а, только въ данномъ случаѣ $a = 0$, а приращеніе $h = 1$, какъ обыкновенно и бываетъ въ приложеніяхъ исчисленія конечныхъ разностей. На основаніи (5) прошлаго §а эту сумму можно представить въ видѣ интеграла по конечнымъ разностямъ; итакъ мы имѣемъ:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots U_{n-1} = \sum_0^n U_x$$

Слѣдовательно, суммованіе всевозможныхъ конечныхъ рядовъ сводится къ нахожденію опредѣленныхъ интеграловъ по конечнымъ разностямъ. Если удается найти формулу интеграла, то можно изслѣдовать, не стремится ли полученное выраженіе къ

конечному опредѣленному предѣлу при безконечномъ возрастаніи n; если окажется, что да, и удастся найти этотъ предѣлъ, тѣмъ самымъ рѣшается задача о суммированіи безконечнаго ряда, который тогда навѣрное сходящійся. Слѣдовательно, задача суммированія безконечныхъ рядовъ есть одна изъ задачъ исчисленія конечныхъ разностей; все дѣло сводится къ интегрированію по конечнымъ разностямъ.

Примѣры.

1) $a^0+a^1+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}$. На основаніи формулы (2) это равно:

$$\sum_0^n a^x = \Big|_0^n \frac{a^x}{a-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$$

2) $$1+2+3+\dots+\overline{n-1} = \sum_0^n x^{(1)} = \Big|_0^n \frac{x^{(2)}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

3). Сумма квадратовъ

$$1^2+2^2+3^2+\dots+\overline{n-1}^2 = \sum_0^n x^2;$$

припомнимъ, что $x^{(2)} = x(x-1) = x^2-x$; слѣдовательно $x^2 = x^{(2)}+x^{(1)}$, вставляемъ:

$$\sum_0^n x^2 = \sum_0^n x^{(2)} + \sum_0^n x^{(1)} = \Big|_0^n \frac{x^{(3)}}{3} + \Big|_0^n \frac{x^{(2)}}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}.$$

Такъ же точно можетъ быть получена сумма кубовъ и какихъ угодно цѣлыхъ, по-

ложительныхъ степеней натуральныхъ чиселъ.

4) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n-1.n}=\sum_1^n x^{(-2)}=\Big|_1^n\frac{x^{(-1)}}{-1}=$

$=-\frac{1}{n}+\frac{1}{1}=1-\frac{1}{n}$; при $n=\infty$ предѣлъ есть 1. Въ справедливости вывода легко убѣдиться непосредственно; нашъ рядъ можно представить въ иномъ видѣ:

$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$.

Если раскрыть скобки, то смежные члены сократятся и получится извѣстный уже результатъ.

5) Возьмемъ рядъ:

$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(n-1)\alpha=\sum_1^n \sin(\alpha x)$

Этотъ интегралъ можно бы вычислить на основаніи найденной раньше формулы (4) параграфа 9, сдѣлавши замѣну αx черезъ z; но мы выведемъ для нашего случая отдѣльную формулу. Возьмемъ конечную разность:

$\Delta\cos(\alpha x)=\cos(\alpha x+\alpha)-\cos(\alpha x)=$

$=-2\sin\left(\alpha x+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$;

замѣняемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства x черезъ $x-\frac{\alpha}{2}$, дѣлимъ все равенство на постоянный множитель правой части, получается:

$$\sin(\alpha x)=\frac{\Delta\cos\left(\alpha x-\frac{\alpha}{2}\right)}{-2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

беремъ интегралъ отъ обѣихъ частей

$$\sum \sin(\alpha x) = \frac{\cos(\alpha x - \frac{\alpha}{2})}{-2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Остается взять этотъ неопредѣленный интегралъ между предѣлами

$$\sum_0^n \sin(\alpha x) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(n\alpha - \frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

§15. Разложеніе функцій въ рядъ по функціямъ факторьяльнымъ.

Пусть дана какая-нибудь ф-ія $f(x)$, разложимъ ее въ рядъ по цѣлымъ, положительнымъ степенямъ x, т.е. по формулѣ Маклорена; ради общности положимъ, что этотъ рядъ безконеченъ (рядъ самъ собою окажется конечнымъ, если $f(x)$ цѣлый многочленъ). По извѣстной формулѣ напишемъ

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots \quad (1)$$

Согласно сдѣланному условію рядъ этотъ сходящійся до тѣхъ поръ, пока x по абсолютной величинѣ не достигнетъ нѣкотораго предѣла, послѣ котораго рядъ можетъ сдѣлаться расходящимся; въ частности этотъ предѣлъ можетъ быть $x = \infty$. Мы будемъ говорить только о тѣхъ значеніяхъ x, при которыхъ рядъ (1) сходится.

Припомнимъ сказанное въ прошлыхъ §-ахъ:

всякая цѣлая, положительная степень x^m выражается, какъ цѣлая ф-ія, черезъ факторьяльныя ф-іи $x^{(m)}, x^{(m-1)} \ldots x^{(2)}, x^{(1)}$ при чемъ

$$x^{(m)} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{m-1}h);$$

h какое угодно число, которое мы выбираемъ сообразно условіямъ рѣшаемыхъ задачъ. Оставимъ его пока совершенно произвольнымъ.
Вставивъ въ формулу (1) вмѣсто степеней x ихъ выраженія черезъ факторьяльныя ф-іи и выполнивъ приведеніе, получимъ формулу вида

$$f(x) = A_0 + A_1 x^{(1)} + A_2 x^{(2)} + A_3 x^{(3)} + A_4 x^{(4)} + \ldots \quad (2)$$

Это будетъ безконечный рядъ, сходящійся при тѣхъ же условіяхъ, какъ и рядъ (1). Посмотримъ, какъ найти величину коэффиціентовъ A ряда (2).
Мы прибѣгнемъ къ пріему, подобно какъ при выводѣ формулы Тейлора. Прежде всего составимъ разности различныхъ порядковъ отъ обѣихъ частей формулы (2), примѣняя при этомъ теорему: разность суммы = суммѣ разностей, т.е. составляя разность отъ каждаго члена правой части. Постоянные множители выйдутъ за знакъ разности, формула же разности факторьяльной ф-іи извѣстна; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta f(x) &= A_1 h + 2A_2 h x^{(1)} + 3A_3 h x^{(2)} + 4A_4 h x^{(3)} + \ldots \\
\Delta^2 f(x) &= 2.1 A_2 h^2 + 3.2 A_3 h^2 x^{(1)} + 4.3 A_4 h^2 x^{(2)} + \ldots \\
\Delta^3 f(x) &= 3.2.1 A_3 h^3 + 4.3.2 A_4 h^3 x^{(1)} + \ldots \\
\Delta^4 f(x) &= 4.3.2.1 A_4 h^4 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Въ обѣихъ частяхъ равенствъ (3) полагаемъ $x=0$, факторьяльная ф-iя $x^{(m)}$ при $x=0$ есть нуль; для краткости предварительно введемъ такое обозначенiе:

$$\left[\Delta^m f(x)\right]_{x=0} = \Delta^m f(0);$$

тогда формулы (2) и (3) примутъ видъ:

$f(0) = A_0$; $\Delta f(0) = A_1 h$; $\Delta^2 f(0) = 2.1 A_2 h^2$; $\Delta^3 f(0) = 3.2.1 A_3 h^3$; $\Delta^4 f(0) = 4.3.2.1 A_4 h^4$, ...

откуда

$$A_0 = f(0);\ A_1 = \frac{\Delta f(0)}{h};\ A_2 = \frac{\Delta^2 f(0)}{1.2\,h^2};\ A_3 = \frac{\Delta^3 f(0)}{1.2.3\,h^3};\ A_4 = \frac{\Delta^4 f(0)}{1.2.3.4\,h^4} \ldots\ldots (4)$$

Вставляя эти выраженiя (4) въ формулу (2), получаемъ окончательное выраженiе искомаго ряда:

$$f(x) = f(0) + \frac{\Delta f(0)}{1}\cdot\frac{x^{(1)}}{h} + \frac{\Delta^2 f(0)}{1.2}\cdot\frac{x^{(2)}}{h^2} + \frac{\Delta^3 f(0)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{(3)}}{h^3} + \frac{\Delta^4 f(0)}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^{(4)}}{h^4} + \ldots\ldots (5)$$

Эта формула даетъ разложенiе какой угодно ф-iи по факторьяльнымъ въ безконечный рядъ. Рядъ (5) имѣетъ тѣ же предѣлы сходимости, что и рядъ Маклорена (1). Когда ф-iя $f(x)$ есть цѣлый есть цѣлый многочленъ, то рядъ (5) самъ собою кончится, старшiй членъ его въ правой части будетъ $\frac{\Delta^n f(0)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{x^{(n)}}{h^n}$, гдѣ n степень многочлена $f(x)$. Примѣнимъ эту формулу къ частному случаю. Пусть многочленъ $f(x)$ есть цѣлая, положительная степень x^n; формула (5) дастъ намъ разложенiе цѣлой, положительной степени x^n по функцiямъ факторьяльнымъ, т.е. выраженiе степени x черезъ факторьяльныя

ф-ій, то самое выраженіе, о которомъ мы говорили въ началѣ параграфа. Для краткости мы будемъ сохранять обозначенія, подобныя тѣмъ, которыя мы уже ввели, обозначивъ $[\Delta^m f(x)]_{x=0}$ черезъ $\Delta^m f(0)$; въ разсматриваемомъ теперь частномъ случаѣ мы будемъ обозначать символически:

$$[\Delta^m x^n]_{x=0} = \Delta^m 0^n \ldots (6)$$

Въ §-ѣ о разностяхъ простѣйшихъ ф-ій мы уже видѣли, что разность отъ x^n отлична отъ нуля, пока порядокъ разности не выше степени n; когда порядокъ разности дѣлается выше n, то $\Delta^m x^n$ будетъ нулемъ при всякомъ x, въ томъ числѣ и при $x=0$; если такъ, то $\Delta^m 0^n \neq 0$, пока $m \leq n$.

Эта величина равна нулю, когда $m > n$.

После этихъ предварительныхъ замѣчаній обращаемся къ формулѣ (5), полагая $f(x)=x^n$:

$$x^n = \frac{\Delta 0^n}{1}\cdot\frac{x^{(1)}}{h} + \frac{\Delta^2 0^n}{1.2}\frac{x^{(2)}}{h^2} + \frac{\Delta^3 0^n}{1.2.3}\frac{x^{(3)}}{h^3} + \frac{\Delta^4 0^n}{1.2.3.4}\frac{x^{(4)}}{h^4} + \ldots \frac{\Delta^n 0^n}{1.2\ldots n}\frac{x^{(n)}}{h^n} \ldots (7)$$

Эта формула и есть выраженіе $n^й$ степени x черезъ факторьяльныя ф-іи, причемъ h какое угодно число.

Посмотримъ теперь, какъ вычислить выраженіе вида $\Delta^m 0^n$. Съ этой цѣлью припомнимъ, какъ выражается разность высшего порядка черезъ различныя измѣненныя значенія ф-іи. Обозначая по прежнему символомъ D операцію

состоящую въ увеличенiи x на приращенiе h, мы можемъ написать символическое равенство

$$\Delta = D - 1$$

въ такомъ смыслѣ, какъ это было въ своемъ мѣстѣ пояснено.

Мы уже видѣли, что

$$\Delta^m = (D-1)^m$$

или въ раскрытой формѣ:

$$\Delta^m = D^m - m_1 D^{m-1} + m_2 D^{m-2} - m_3 D^{m-3} + \ldots + (-1)^{m-1} m_{m-1} D + (-1)^m \ldots (8)$$

приставивъ къ той и другой части равенства (8) справа символъ какой угодно ф-iи, получимъ тождество; приставимъ x^n, получится слѣдующее:

$$\Delta^m x^n = D^m x^n - m_1 D^{m-1} x^n + m_2 D^{m-2} x^n - m_3 D^{m-3} x^n + \ldots (-1)^{m-1} m_{m-1} D^{m-1} x^n + (-1)^m x^n.$$

Замѣняемъ символы D различныхъ порядковъ соотвѣтствующими выраженiями, т. е. выполняемъ эти дѣйствiя D и получимъ:

$$\Delta^m x^n = (x+mh)^n - m_1(x+\overline{m-1}\,h)^n + m_2(x+\overline{m-2}\,h)^n -$$
$$- m_3(x+\overline{m-3}\,h)^n + \ldots + (-1)^{m-1} m_{m-1}(x+h)^n + (-1)^m x^n \ldots (9)$$

Полагая въ обѣихъ частяхъ этого равенства $x=0$, найдемъ выраженiе искомаго количества $\Delta^m 0^n$, а именно

$$\Delta^m 0^n = h^n \{ m^n - m_1(m-1)^n + m_2(m-2)^n - m_3(m-3)^n + \ldots (-1)^{m-1} m_{m-1} \} \ldots (10)$$

Такъ выражаются $\Delta^m 0^n$ при произвольномъ h; вставивъ ихъ въ формулу (7), получимъ окончательное выраженiе искомой формулы. Въ приложенiи чаще всего встрѣчается тотъ

случай, когда приращеніе $h=1$; тогда формула (7) приметъ видъ:

$$x^n = \Delta 0^n x^{(1)} + \frac{\Delta^2 0^n}{1.2} x^{(2)} + \frac{\Delta^3 0^n}{1.2.3} x^{(3)} + \frac{\Delta^4 0^n}{1.2.3.4} x^{(4)} + \dots \frac{\Delta^n 0^n}{1.2\dots n} x^{(n)} \dots (7')$$

выраженіе $\Delta^m 0^n$ въ этомъ случаѣ будетъ разниться отъ формулы (10) только тѣмъ, что множитель h^n замѣнится единицей, т. е.

$$\Delta^m 0^n = m^n - m_1(m-1)^n + m_2(m-2)^n - m_3(m-3)^n + \dots + (-1)^{m-1} m_{m-1} \dots (10')$$

Обыкновенно подъ $\Delta^m 0^n$ и подразумѣвается это выраженіе (10'). Давая въ немъ m и n различныя значенія, получимъ для $\Delta^m 0^n$ рядъ чиселъ, которыя получили названіе чиселъ Моргана, для нихъ существуютъ вычисленныя таблицы, дающія готовыми ихъ величины.

Примѣръ таблицы Моргана:

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
0	1	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720

§ 16. Числа Бернулли.

Возьмемъ ф-ію $\frac{x}{e^x - 1}$, разложимъ ее въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x. Эта ф-ія однозначная; при $x=0$ выраженіе взятой ф-іи имѣетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$; для

нахожденія истинной ея величины примѣнимъ правило l'Hospital-я, получится:

$$\left[\frac{1}{e^x}\right]_{x=0} = 1.$$

Теорія ф-ій комплекснаго перемѣннаго показываетъ, что если ф-ія однозначная, и конечна при $x=0$, то ее можно разложить въ рядъ по формулѣ Маклорена, причемъ рядъ этотъ навѣрное будетъ сходящимся, пока x по абсолютной величинѣ не достигнетъ нѣкотораго предѣла. Для нашей цѣли важно знать только коэффиціенты этого разложенія, поэтому можно и не касаться вопроса о сходимости.

Замѣчаніе. Примѣняя правила теоріи ф-ій комплекснаго перемѣннаго, можно напередъ сказать, что рядъ будетъ сходящимся, если x по абсолютной величинѣ будетъ меньше 2π; это отчасти выяснится и впослѣдствіи.

Непосредственное примѣненіе формулы Маклорена было бы очень сложно; мы примѣнимъ методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Представимъ искомое разложеніе въ такой формѣ:

$$\frac{x}{e^x-1} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \ldots \quad (1).$$

Заранѣе можно сказать, что $A_0 = 1$, такъ какъ при $x=0$ лѣвая часть равна единицѣ. Изъ анализа извѣстно:

$$e^x - 1 = \cancel{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \cancel{-1} \quad \dots (2)$$

Освобождаемъ (1) отъ знаменателя, въ лѣвой части равенства останется x, а въ правой — произведенiе двухъ рядовъ (1) и (2); перемножаемъ ихъ:

$$\begin{aligned}
x = A_0 x &+ A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4 + A_4 x^5 + A_5 x^6 + \dots \\
&+ \frac{A_0}{1.2} x^2 + \frac{A_1}{1.2} x^3 + \frac{A_2}{1.2} x^4 + \frac{A_3}{1.2} x^5 + \frac{A_4}{1.2} x^6 + \dots \\
&+ \frac{A_0}{1.2.3} x^3 + \frac{A_1}{1.2.3} x^4 + \frac{A_2}{1.2.3} x^5 + \frac{A_3}{1.2.3} x^6 + \dots \\
&+ \frac{A_0}{1.2.3.4} x^4 + \frac{A_1}{1.2.3.4} x^5 + \frac{A_2}{1.2.3.4} x^6 + \dots \\
&+ \frac{A_0}{1.2.3.4.5} x^5 + \frac{A_1}{1.2.3.4.5} x^6 + \dots \\
&+ \frac{A_0}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \dots
\end{aligned}$$

Совершаемъ сравненiе коэффицiентовъ въ обѣихъ частяхъ написаннаго равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&A_0 = 1; \\
&A_1 + \frac{1}{1.2} = 0; \\
&A_2 + \frac{A_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0; \\
&A_3 + \frac{A_2}{1.2} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0 \\
&A_4 + \frac{A_3}{1.2} + \frac{A_2}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0 \\
&A_5 + \frac{A_4}{1.2} + \frac{A_3}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2.3.4} + \frac{A_1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} (3)$$

Равенства (3) опредѣляютъ коэффицiенты A. Какъ

изъ нихъ видно $A_1 = -\frac{1}{2}$; $A_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ и т. д. Коэффиціенты A, опредѣляемые таблицей (3) называются Эйлеровыми коэффиціентами.

Разсмотримъ нѣсколько ближе разложеніе (1). Перенесемъ первые два члена изъ правой части влѣво, замѣнивъ A_0 и A_1 ихъ значеніями; получимъ

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots \quad (4)$$

Разсмотримъ выраженіе лѣвой части; докажемъ, что ф-ія эта четная, т. е. съ измѣненіемъ знака при x сама ф-ія знака своего не мѣняетъ. Для краткости обозначимъ ее: $f(x) = \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} \dots \quad (5)$

замѣняемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства x черезъ $(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2};$$

умножаемъ числителя и знаменателя первой дроби на e^x и относимъ къ знаменателю минусъ, стоящій въ числителѣ:

$$f(-x) = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} - 1 - \frac{x}{2};$$

изъ числителя той же дроби вычтемъ и прибавимъ x, подписавая отдѣльно знаменатель подъ первыми двумя членами и производя сокращеніе: $f(-x) = x + \frac{x}{e^x-1} - 1 - \frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2}$

правая часть полученной формулы тождественна съ правой частью равенства (5), слѣдовательно и лѣвыя части равны

$$f(x) = f(-x),$$

а это и значитъ, что ф-ія $f(x)$ - четная. Если такъ, то въ правой части разложенія (4) должны входить только четныя степени x; Эйлеровы коэффиціенты съ нечетными указателями, начиная съ A_3, должны быть нулями

$$A_3 = A_5 = A_7 = A_9 = \ldots\ldots = 0 \ldots \quad (6)$$

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ придется пользоваться разложеніемъ синуса въ безконечное произведеніе.

$\sin x$ есть ф-ія, которая конечна и однозначна при всякомъ конечномъ x; при всякомъ конечномъ x она выражается формулою

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

т.е. она имѣетъ характеръ цѣлаго многочлена безконечно высокой степени; она обращается въ нуль

при $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\ldots$

$= -\pi, -2\pi, -3\pi$

Мы вправѣ ожидать, что подобно цѣлому многочлену ее можно разложить на простые линейные множители, изъ которыхъ каждый соотвѣтствовалъ бы своему корню;

разница только въ томъ, что число множителей будетъ безконечно велико, возникнетъ вопросъ о сходимости. Такое произведение представится въ слѣдующей формѣ

$$F(x) = Ax(x-\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)\dots(x-\overline{n-1}\,\pi)(x-n\pi).$$
$$\cdot(x+\pi)(x+2\pi)(x+3\pi)\dots(x+\overline{n-1}\,\pi)(x+n\pi)\dots(7)$$

число n въ предѣлѣ придется положить равнымъ безконечности; пока оставимъ его конечнымъ и разсмотримъ свойства написаннаго выраженія, причемъ A - постоянный коэффиціентъ, пока совершенно произвольный. Если $\sin x$ разсматривать, какъ безконечное произведеніе, то это послѣднее должно быть вида (7) при $n=\infty$. Первое свойство ф-іи $\sin x$ находится въ связи съ его періодомъ; даемъ x въ обѣихъ частяхъ формулы (7) приращеніе π

$$F(x+\pi) = A(x+\pi)x(x-\pi)(x-2\pi)\dots(x-\overline{n-1}\,\pi).$$
$$\cdot(x+2\pi)(x+3\pi)\dots(x+n\pi)(x+\overline{n+1}\,\pi)$$

раздѣлимъ это равенство на предшествующее:

$$\frac{F(x+\pi)}{F(x)} = \frac{x+(n+1)\pi}{x-n\pi};$$

раздѣлимъ числителя и знаменателя на n, тогда получится

$$\frac{F(x+\pi)}{F(x)} = \frac{\frac{x+\pi}{n}+\pi}{\frac{x}{n}-\pi}.$$

Таково равенство при конечномъ n, при $n=\infty$ равенство приметъ видъ

$$\frac{F(x+\pi)}{F(x)} = -1$$

Итакъ при $n=\infty$ имѣетъ мѣсто равенство

$$F(x+\pi) = -F(x) \ldots \quad (8)$$

равенство такого же вида, какъ

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

Если въ обѣихъ частяхъ равенства (8) къ x придавить еще одно π, то получится

$$F(x+2\pi) = -F(x+\pi) = F(x) \ldots\ldots (9)$$
при $n=\infty$

Равенство (9) показываетъ, что взятое нами выраженіе есть періодическая ф-iя съ періодомъ 2π, такъ же точно какъ синусъ. Во взятой формулѣ $F(x)$ вынесемъ за скобки общимъ множителемъ 2ой членъ каждой скобки съ его знакомъ; произведеніе этихъ вторыхъ членовъ скобокъ есть величина постоянная относительно x; эту постоянную величину, умноженную на постоянную величину A, обозначимъ одной буквой B; такъ какъ A произвольно, B будетъ также произвольнымъ. Формула приметъ видъ

$$F(x) = Bx\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right).$$
$$\ldots\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)$$

Множители обѣихъ строкъ соединяемъ попарно

$$F(x)= Bx\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

Раздѣлимъ обѣ части написаннаго равенства на x

$$\frac{F(x)}{x} = B\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$$

Станемъ уменьшать x приближая его къ нулю, въ предѣлѣ получится

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{x} = B$$

Это равенство существуетъ при всякомъ n, оно справедливо и при $n=\infty$. Предѣлъ отношенія $\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}$ равенъ единицѣ, слѣдовательно, если мы хотимъ, чтобы $F(x)$ обладало тѣми же свойствами, какъ $\sin x$, то постоянное число B надо выбрать такъ, чтобы при $n=\infty$ оно равнялось единицѣ; тогда наша формула получитъ видъ

$$F(x)= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)_{n=\infty}$$

Въ правой части написанной формулы стоитъ произведеніе изъ безконечно большого числа множителей, возникаетъ вопросъ о сходимости такого произведенія. Второй членъ каждой скобки, при x дѣйствительномъ, есть величина существенно положительная, числитель ея есть одна и та же величина x^2, знаменатель же увеличивается вмѣстѣ съ номеромъ скобки, считая отъ начала, слѣдова-

тельно, если въ первыхъ нѣсколькихъ скоб-
кахъ второй членъ и оказался бы неправиль-
ной дробью, необходимо начиная отъ нѣ-
которой скобки съ конечнымъ номеромъ и
вплоть до безконечности вторые члены этихъ
скобокъ будутъ дробями правильными; всѣ
такие множители будутъ положительны-
ми меньше единицы; скобки, весьма удален-
ныя, безконечно близки къ единицѣ. Итакъ,
при x дѣйствительномъ наше произведение
состоитъ изъ множителей слѣдующихъ
типовъ: сначала идетъ конечное число
множителей, положительныхъ либо отрица-
тельныхъ, которые по абсолютной величинѣ
могутъ быть даже больше единицы, но
число ихъ конечно, а потому и произведение ихъ
конечно; далѣе идетъ безконечный рядъ мно-
жителей, которые всѣ меньше единицы и
положительны, безконечно удаленные изъ нихъ
безконечно близки къ единицѣ; такое произ-
ведение ни въ какомъ случаѣ не будетъ без-
конечностью; можно было бы только думать,
не окажется ли оно нулемъ. Примѣнение
теоремъ о сходимости безконечныхъ произве-
дений, доказываемыхъ въ теорiи ф-iй, пока-
зываетъ, что въ данномъ случаѣ произве-
дение будетъ конечнымъ какъ при дѣйстви-

тельномъ, такъ и при мнимомъ x, лишь бы оно было конечнымъ. Поэтому то полученное выраженіе есть ф-ія x, конечная при всякомъ x, имѣющая тѣ же корни, что и ф-ія $\operatorname{Sn} x$, и обладающая основными свойствами ф-іи $\operatorname{Sn} x$, выражаемыми такъ:

$$\operatorname{Sn}(x+\pi) = -\operatorname{Sn} x$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{Sn} x}{x} = 1$$

Теорія ф-ій показываетъ, что такими свойствами можетъ обладать только одна аналитическая ф-ія. Всякія двѣ ф-іи, обладающія этими свойствами, равны между собой, а поэтому полученное нами произведеніе есть синусъ. Итакъ мы имѣемъ:

$$\operatorname{Sn} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)_{n=\infty}$$

Иногда такія произведенія обозначаются символически:

$$\operatorname{Sn} x = x \prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \dots \quad (10)$$

Изъ формулы (10) можно вывести, какъ слѣдствіе, приводимую обыкновенно въ курсахъ анализа формулу Wallis'а, которая намъ впослѣдствіи понадобится. Положимъ въ обѣихъ частяхъ формулы (10) $x = \frac{\pi}{2}$, тогда получимъ

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

или:

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{k=\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2}.$$

Изъ этой формулы можно опредѣлить:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

Напишемъ это произведеніе въ раскрытой формѣ:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2.4^2.6^2.8^2\ldots(2n)^2}{1.3.3.5.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)(2n+1)}$$

Мы видимъ, что въ знаменатель входятъ множителями всевозможныя нечетныя числа, каждое по два раза, кромѣ 1 и послѣдняго $(2n+1)$, которые входятъ по разу; поэтому ту же формулу мы можемъ переписать въ такомъ видѣ

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2.4^2.6^2.8^2\ldots(2n)^2}{1^2.3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} \quad \ldots\ldots (11)$$

Эта формула и носитъ названіе формулы Валлиса.

Логарифмируемъ обѣ части равенства (10) и беремъ производную отъ нихъ по x, тогда будетъ:

$$\frac{Cs\,x}{Sn\,x} = Ctg\,x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{-\frac{2x}{k^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}};$$

$$Ctg\,x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} \quad \ldots\ldots (12)$$

Формула (12) даетъ разложеніе котангенса въ безконечный рядъ, напоминающее собою разложеніе раціональной дроби на простыя по корнямъ знаменателя. Величины x, при которыхъ $Ctg\,x$ обратится въ ∞ будутъ: 0 и величины $\pm k\pi$, кратныя π. Соотвѣтственныя

простыя дроби будутъ вида:

$$\frac{A}{x};\quad \frac{B}{x-k\pi};\quad \frac{B'}{x+k\pi}.$$

Первая изъ этихъ дробей есть $\frac{1}{x}$, а дроби второго типа попарно соединены.

Постараемся разложить S формулы (12) по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x; тогда формула дастъ намъ разложеніе $Ctg\,x$ въ формулу, подобную Маклореновой формулѣ для $Ctg\,x-\frac{1}{x}$; но непосредственное примѣненіе формулы Маклорена было бы очень сложно. Формула (12) позволитъ достичь той же цѣли, но много быстрѣе. Итакъ беремъ:

$$\frac{2x}{k^2\pi^2-x^2}=\frac{2x}{k^2\pi^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}$$

Если x по абсолютной величинѣ или, лучше сказать, по модулю меньше π,

$$\text{Мод}(x)<\pi\ \ldots\ (13)$$

то $\frac{x^2}{k^2\pi^2}$ при всякомъ k отъ 1 до ∞ по модулю будетъ меньше единицы

$$\text{Мод}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)<1$$

Если такъ, то $\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}}$ можно разложить въ безконечный рядъ по формулѣ Бинома съ показателемъ -1, а именно

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}}=\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^{-1}=1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}+\frac{x^4}{k^4\pi^4}+\frac{x^6}{k^6\pi^6}+\frac{x^8}{k^8\pi^8}+\ldots$$

Умножаемъ обѣ части этого равенства на $\frac{2x}{k^2\pi^2}$,

$$\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{k^2\pi^2} + \frac{2x^3}{k^4\pi^4} + \frac{2x^5}{k^6\pi^6} + \frac{2x^7}{k^8\pi^8} + \frac{2x^9}{k^{10}\pi^{10}} + \ldots\ldots (14)$$

Рядъ навѣрное сходящійся при условіи (13). Чтобы вычислить сумму (12), намъ надо въ формулѣ (14) поочередно положить $k = 1, 2, 3 \ldots \infty$ и всѣ полученныя равенства сложить. Складываемъ ихъ столбцами, вынося общіе множители за скобки:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{\pi^2}&\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right\} + \\ + \frac{2x^3}{\pi^4}&\left\{\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right\} + \\ + \frac{2x^5}{\pi^6}&\left\{\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right\} + \\ + \frac{2x^7}{\pi^8}&\left\{\frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \ldots\right\} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

Выраженія, стоящія въ скобкахъ равенства (15) суть безконечные ряды слѣдующаго вида:

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots$$

Изъ теоріи рядовъ извѣстно, что такой рядъ сходится при всякомъ μ больше единицы; обозначимъ его значкомъ

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots = S_\mu \ldots (16)$$

гдѣ $\mu > 1$. Сумма S_μ величина конечная. Вводя подобныя обозначенія въ форм (15) получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{\pi^2} S_2 + \frac{2x^3}{\pi^4} S_4 + \frac{2x^5}{\pi^6} S_6 + \frac{2x^7}{\pi^8} S_8 + \ldots$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2 \cdot S_{2l}}{\pi^{2l}} \cdot x^{2l-1} \ldots\ldots (17)$$

эту формулу оставимъ во вторую часть равенства (12), получимъ слѣдующее:

$$Ctg\,x = \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2.S_{2l}}{\pi^{2l}} . x^{2l-1} \ldots \quad (18)$$

Формула (18) даетъ разложеніе $Ctg\,x$ по цѣлымъ степенямъ x; коэффиціенты разложенія выражаются черезъ числа вида S_μ и число π.

Перейдемъ отъ тригонометрическихъ ф-ій къ показательнымъ. Мы знаемъ, что

$$Cs\,x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\,; \quad Sn\,x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\,;$$

на этомъ основаніи

$$Ctg\,x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{e^{xi}-e^{-xi}} . i = \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2.S_{2l}}{\pi^{2l}} . x^{2l-1} \ldots \quad (19)$$

формула годная, пока $mod(x) < \pi$.

Вставляемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства xi вмѣсто x:

$$\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}} . i = \frac{1}{xi} - \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2.S_{2l}}{\pi^{2l}} . i^{2l-1} x^{2l-1} .$$

множимъ на i обѣ части этого равенства

$$-\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}} = \frac{1}{x} - \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2.S_{2l}}{\pi^{2l}} . (-1)^{l} . x^{2l-1} \ldots \quad (20)$$

Преобразуемъ лѣвую часть, умноживъ числителя и знаменателя ея на e^x и отнеся минусъ къ знаменателю

$$\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1} = \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1} .$$

Внесемъ это въ форм (20), умножимъ все

на x, получится

$$\frac{2x}{e^{2x}-1}+x=1+\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{2.S_{2l}}{\pi^{2l}}(-1)^{l+1}x^{2l}\ \ldots\ldots(21)$$

Лѣвая часть формулы (21) похожа на ту ф-цію $\frac{x}{e^x-1}$, разложеніемъ которой мы занимались въ началѣ §-а. Чтобы получить ее, надо въ обѣихъ частяхъ формулы (21) замѣнить x черезъ $\frac{x}{2}$. Такъ какъ форм (21) справедлива для всякого x, удовлетворяющаго неравенству (13), то та формула, которую мы получимъ послѣ указанной замѣны, будетъ справедлива при условіи

$$\mathrm{Mod}(x)<2\pi\ \ldots\ (22)$$

Выполнивши замѣну въ форм (21), получимъ

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{S_{2l}}{2^{2l-1}.\pi^{2l}}(-1)^{l+1}x^{2l}\ \ldots\ (23)$$

Формула (23) даетъ то же самое разложеніе, которымъ мы занимались раньше; тогда мы видѣли, что

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots\ldots,$$

гдѣ A суть Эйлеровы коэффиціенты. Мы нашли, что коэффиціенты A съ нечетными индексами всѣ $=0$. Всѣ эти коэффиціенты суть раціональныя числа, которыя опредѣляются изъ системы ур-ій (3), причемъ та же формула въ сокращенномъ видѣ представится такъ:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{l=1}^{l=\infty} A_{2l}\cdot x^{2l} \quad \ldots\ldots (24)$$

разложенія (23) и (24) должны быть тождественны между собою, такъ какъ лѣвыя части одинаковы. Условіе сходимости формулы (24) выражается формулой (23), соотвѣтственные ихъ коэффиціенты одинаковы:

$$A_{2l} = \frac{(-1)^{l+1} S_{2l}}{2^{2l-1}\pi^{2l}} \quad \ldots\ldots (25)$$

Формула эта даетъ намъ нѣкоторыя заключенія о коэффиціентахъ Эйлера A_{2l}; число S_{2l} есть величина положительная, также точно $2^{2l-1}\pi^{2l}$ — положительно, слѣдовательно знакъ коэффиціента A_{2l} опредѣляется множителемъ $(-1)^{l+1}$. Та же формула позволяетъ намъ вычислить величину S_{2l}, такъ какъ Эйлеровы коэффиціенты мы умѣемъ находить изъ ур-ій (3); именно

$$S_{2l} = (-1)^{l+1}\cdot 2^{2l-1}\pi^{2l} A_{2l} \quad \ldots\ldots (26),$$

гдѣ въ правой части всѣ величины намъ извѣстны. Формула (26) позволяетъ намъ вычислить коэффиціенты S_{2l}; S_{2l} есть ирраціональное число, ирраціональность его зависитъ отъ π; однако въ формулѣ (26) индексъ величины S_μ есть четное число, $\mu = 2l$; подобной же формулы для S_μ при нечетномъ μ мы совершенно не знаемъ.

Въ приложеніи формулы (24) вмѣсто Эйлеровыхъ коэффиціентовъ A_{2l} принято вводить нѣсколько иныя величины, называемыя числами Бернулли, они обозначаются буквой B съ индексами и связаны съ Эйлеровыми коэффиціентами соотношеніемъ:

$$A_{2l} = \frac{B_{2l-1}}{1.2.3\ldots 2l}\cdot(-1)^{l+1} \ldots\ldots (27)$$

Отсюда слѣдуетъ, что Бернуллiевы коэффиціенты B_{2l-1} всѣ будутъ числами положительными и раціональными, потому что A_{2l} раціональны. Раздѣливъ формулу (24) на x и подставивъ новыя величины B, получимъ:

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{l=\infty}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{1.2.3\ldots 2l}x^{2l-1}\ldots (28)$$

Зная коэффиціенты Эйлера, вычисляемые изъ системы ур-ій (3), мы можемъ вычислить и числа Бернулли:

$$B_1 = \frac{1}{6};\ B_3 = \frac{1}{30};\ B_5 = \frac{1}{42};\ B_7 = \frac{1}{30};$$

$$B_9 = \frac{5}{66};\ B_{11} = \frac{691}{2730};\ B_{13} = \frac{7}{6};\ B_{15} = \frac{3617}{510};$$

$$B_{17} = \frac{43867}{798}\ldots\ldots$$

§17 Теорема Маклорена — Эйлера

Суть этой теоремы заключается въ установленіи связи между опредѣленнымъ интеграломъ и интеграломъ по конечнымъ раз-

ностямъ. Возьмемъ ф-цію $F(x)$, дадимъ x приращеніе h и разложимъ $F(x+h)$ по формулѣ Тейлора, причемъ мы возьмемъ эту формулу съ остаточнымъ членомъ въ видѣ опредѣленнаго интеграла

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \frac{h^4}{1.2.3.4}F^{IV}(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(x) + \frac{1}{1.2.3,..n}\int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t^n dt$$

Перенесемъ первый членъ правой части влѣво и введемъ для краткости обозначенія:

$$1.2.3.4\ldots\ k = k!$$

получимъ:

$$\Delta F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x) + \frac{h^4}{4!}F^{IV}(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x) + \frac{1}{n!}\int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t^n dt$$

Примѣняемъ эту же самую формулу для нахожденія разности $\Delta F'(x)$, причемъ въ правой части мы возьмемъ однимъ членомъ меньше, получимъ слѣдующее

$$\Delta F'(x) = hF''(x) + \frac{h^2}{2!}F'''(x) + \frac{h^3}{3!}F^{IV}(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n-1!}F^{(n)}(x) +$$
$$+ \frac{1}{n-1!}\int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t^{n-1}dt$$

По той же самой формулѣ вычислимъ $\Delta F''(x)$, причемъ возьмемъ еще на одинъ членъ меньше въ правой части

$$\Delta F''(x) = hF'''(x) + \frac{h^2}{2!}F^{IV}(x) + \ldots + \frac{h^{n-2}}{n-2!}F^{(n)}(x) + \frac{1}{n-2!}\int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t^{n-2}dt$$

Подобнымъ же образомъ

$$\Delta F'''(x) = hF^{IV}(x) + \dots + \frac{h^{n-3}}{n-3!} F^{(n)}(x) + \frac{1}{n-3!}\int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t^{n-3}dt.$$

. . . .

. . . .

Послѣднюю строчку мы возьмемъ въ видѣ

$$\Delta F^{(n-1)}(x) = hF^{(n)}(x) + \int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)t\,dt$$

Собирая полученныя равенства и подписывая ихъ такъ, чтобы производныя одинаковыхъ порядковъ отъ $F(x)$ приходились одна подъ другой, умножаемъ равенства соотвѣтственно на слѣдующія величины:

первое на единицу,
второе " A_1h,
третье " A_2h^2,
четвертое " A_3h^3,
. . . .
. . . .
послѣднее " $A_{n-1}h^{n-1}$.

цѣль наша уравнять степени h во всѣхъ строкахъ при однихъ и тѣхъ же производныхъ, причемъ $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ совершенно произвольны.

Выполнивъ умноженіе, мы всѣ равенства сложимъ и подберемъ неопредѣленные коэффиціенты A такъ, чтобы суммы всѣхъ столбцовъ, начиная со второго и кончая послѣднимъ, стоящимъ передъ остаточнымъ членомъ, были нулями. Посмотримъ, какимъ уравненіямъ должны удовлетворять коэффиціенты A для этой цѣли. Во второмъ столбцѣ $h^2F''(x)$ выйдетъ два слагаемыхъ; въ слагаемыхъ останется

$\frac{1}{2!} + A_1$ и это должно равняться нулю:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2!} + A_1 = 0 \\ \text{Въ третьемъ столбцѣ: } \frac{1}{3!} + \frac{A_1}{2!} + A_2 = 0 \\ \text{Въ четв. столбцѣ } \frac{1}{4!} + \frac{A_1}{3!} + \frac{A_2}{2!} + A_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{Въ посл. столбцѣ } \frac{1}{n!} + \frac{A_1}{n-1!} + \frac{A_2}{n-2!} + \frac{A_3}{n-3!} + \ldots A_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Итакъ мы подбираемъ неопредѣленные коэффиціента такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства(1). Выбравъ соотвѣтствующимъ образомъ коэффиціенты A, мы послѣ сложенія тѣхъ равенствъ получимъ

$$\Delta F(x) + A_1 h \Delta F'(x) + A_2 h^2 \Delta F''(x) + A_3 h^3 \Delta F'''(x) + \ldots A_{n-1} h^{n-1} \Delta F^{(n-1)}(x) =$$
$$= hF'(x) + \int^h F^{(n+1)}(x+t-h)\left\{\frac{t^n}{n!} + \frac{A_1 h t^{n-1}}{n-1!} + \frac{A_2 h^2 t^{n-2}}{n-2!} + \ldots + \frac{A_{n-1} h^{n-1} t}{1}\right\} dt \ldots (2)$$

Многочленъ, стоящій въ скобкахъ подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, есть цѣлый многочленъ $n^{\text{й}}$ степени относительно t; кромѣ того онъ содержитъ въ себѣ величину h и коэффиціента A, опредѣляемые ур-іями (1). Обозначимъ этотъ многочленъ черезъ $\varphi_n(t,h)$, такъ что

$$\varphi_n(t,h) = \frac{t^n}{n!} + \frac{A_1 h t^{n-1}}{n-1!} + \frac{A_2 h^2 t^{n-2}}{n-2!} + \ldots A_{n-1} h^{n-1} t \ldots (3)$$

Обратимъ вниманіе на коэфф-ты A, опредѣляемые формулами (1). Обращаясь къ прошлому параграфу, мы замѣтимъ, что это тѣ самые ур-ія, которыми опредѣляются коэффиціенты Эйлера, коэффиціенты разложенія ф-іи $\frac{x}{e^x-1}$ въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x.

Итакъ A оказываются коэффиціентами Эйлера. Въ предыдущемъ §-ѣ мы видѣли многія свойства этихъ коэффиціентовъ. Первое изъ ур-ій (1) показываетъ, что $A_1 = -\frac{1}{2}$; въ прошломъ §-ѣ мы обнаружили, что остальные коэффиціенты A съ нечетными индексами равны нулю, т. е.

$$A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$$

Что касается коэффиціентовъ A съ четными индексами, то они отъ нуля отличны и, какъ мы видѣли въ прошломъ §-ѣ, связаны съ числами Бернулли соотношеніемъ вида

$$A_{2l} = (-1)^{l+1} \frac{B_{2l-1}}{2l!},$$

причемъ числа Бернулли всѣ суть числа положительныя, такъ какъ знакъ Эйлеровыхъ коэффиціентовъ A_{2l} опредѣляется множителемъ $(-1)^{l+1}$.

Нумеруемъ равенства

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \\ A_3 = A_5 = A_7 &= \ldots = 0 \\ A_{2l} &= (-1)^{l+1} \frac{B_{2l-1}}{2l!} \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Возвратимся къ формулѣ (2); внесемъ въ нее обозначенія (3), перенесемъ всѣ члены лѣвой части, кромѣ перваго, въ правую сторону, получимъ:

$$\Delta F(x) = hF'(x) - A_1 h\Delta F'(x) - A_2 h^2 \Delta F''(x) - A_3 h^3 \Delta F'''(x) - \dots$$

$$- A_{n-1} h^{n-1} \Delta F^{(n-1)}(x) + \int_0^h F^{(n+1)}(x+t-h)\varphi_n(t,h)dt \dots (5)$$

Беремъ отъ объихъ частей формулы (5) почленно интегралъ по конечнымъ разностямъ въ предълахъ отъ a до b, причемъ a и b какія угодно два числа, лишь бы ихъ разность была кратной h, т. е. чтобы

$$\frac{b-a}{h} = \text{цѣл. числу}.$$

Выполняя интеграцію, мы замѣчаемъ, что интегрированіе по конечнымъ разностямъ и взятіе Δ взаимно уничтожаются, но такъ какъ интегралъ берется опредѣленный въ предѣлахъ отъ a до b, то всѣ члены будутъ стоять подъ знакомъ подстановки; результатъ интегрированія приметъ видъ:

$$F(b) - F(a) = h\sum_a^b F'(x) - A_1 h\{F'(b) - F'(a)\} - A_2 h^2\{F''(b) - F''(a)\} -$$

$$- A_3 h^3\{F'''(b) - F'''(a)\} - \dots - A_{n-1} h^{n-1}\{F^{(n-1)}(b) - F^{(n-1)}(a)\} +$$

$$+ \int_0^h \varphi_n(t,h) \sum_a^b F^{(n+1)}(x+t-h)dt \dots\dots (6)$$

Обозначимъ $F'(x) = f(x)$

тогда $F(x) = \int f(x)dx$

Введемъ эти обозначенія въ формулу (6); въ лѣвой части

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

такъ что формула (6) напишется такъ:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_a^b f(x) - A_1 h\{f(b)-f(a)\} - A_2 h^2\{f'(b)-f'(a)\} -$$
$$- A_3 h^3\{f''(b)-f''(a)\} - \dots - A_{n-1} h^{n-1}\{f^{(n-2)}(b)-f^{(n-2)}(a)\} +$$
$$+ \int_0^h \varphi_n(t,h)\sum_a^b f^{(n)}(x+t-h)dt \dots\dots (7)$$

Примѣнимъ къ формулѣ (7) обозначенія (4). $A_1 = -\frac{1}{2}$; изъ числа слѣдующихъ членовъ всѣ тѣ, гдѣ индексъ при A число нечетное, обращаются въ нули. Число n въ формулѣ (7) оставалось до сихъ поръ совершенно произвольнымъ; мы выберемъ его такъ, чтобы $n-1$ было нечетнымъ, тогда n будетъ число четное, обозначимъ его

$$n = 2m;$$

вслѣдствіе этого послѣдній членъ передъ остаточнымъ будетъ нулемъ. Сумма членовъ правой части, начиная съ $-A_2h^2$, можетъ быть написана въ болѣе сокращенномъ видѣ, если мы составимъ формулу общаго члена и поставимъ знакъ суммы передъ нимъ:

$$\sum_{l=1}^{l=m-1} -A_{2l}h^{2l}\left(f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)\right)$$

Вмѣсто A_{2l} можно внести его выраженіе черезъ коэффиціентъ Бернулли

$$A_{2l} = (-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l!}$$

тогда сумма приметъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^l\frac{B_{2l-1}}{2l!}h^{2l}\left(f^{(2l-1)}(b)-f^{(2l-1)}(a)\right)$$

Введя это обозначеніе, мы дадимъ формулѣ (7) такой видъ:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_a^b f(x)+\frac{h}{2}\{f(b)-f(a)\}+$$
$$+\sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^l\cdot\frac{B_{2l-1}}{2l}h^{2l}\left\{f^{(2l-1)}(b)-f^{(2l-1)}(a)\right\}+R_m \quad (8)$$

гдѣ $R_m=\int_0^h \varphi_n(t,h)\sum_a^b f^{(2m)}(x+t-h)dt \ldots. (9)$

Формула (8) и есть формула Маклорена-Эйлера, устанавливающая связь между опредѣленнымъ интеграломъ и интеграломъ по конечнымъ разностямъ; формула (9) даетъ остаточный членъ этой формулы (8); число h въ ней совершенно произвольно, но въ приложеніяхъ обыкновенно разсматривается частный случай, когда $h=1$; въ этомъ случаѣ $\varphi_n(t,h)=\varphi_n(t,1)$, обозначимъ ее такъ

$$\varphi_n(t,1)=\varphi_n(t) \ldots (10)$$

Это цѣлый многочленъ $n^{ой}$ степени относительно t съ числовыми вполнѣ опредѣленными коэффиціентами, которые выражаются черезъ Эйлеровы коэффиціенты A, а слѣдовательно и черезъ коэффиціенты Бернулли B. Полученная ф-ія $\varphi_n(t)$ носитъ названіе функціи Бернулли; нѣкоторыя важнѣйшія ея свойства мы разсмотримъ въ слѣ-

дующемъ параграфѣ. Полагая въ формулѣ (8) $h=1$, мы получимъ

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_a^b f(x) + \frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\} + \sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^l \frac{B_{2l-1}}{2l!}\left\{f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)\right\} + R_m \ldots (11)$$

остаточный членъ

$$R_m = \int_0^1 \varphi_n(t)\sum_a^b f^{(2m)}(x+t-1)dt \ldots (12)$$

причемъ функція $\varphi_n(t)$, на основаніи выведенной раньше формулы (3), выразится слѣдующимъ образомъ

$$\varphi_n(t) = \frac{t^n}{n!} + \frac{A_1 t^{n-1}}{n-1!} + \frac{A_2 t^{n-2}}{n-2!} + \ldots \frac{A_{n-1}}{1}\cdot t \ldots (13)$$

Въ формулѣ (11) число m совершенно произвольно; можно его взять сколь угодно большимъ; тогда сумма въ правой части формулы (11) представитъ собою рядъ съ весьма большимъ числомъ членовъ; формула (12) дастъ выраженіе остаточнаго члена этого ряда. Можетъ случиться, что при безпредѣльномъ возрастаніи m остаточной членъ безконечно малъ, тогда рядъ можно продолжить до безконечности и онъ будетъ навѣрное сходящимся. Но такой случай, сравнительно, рѣдокъ; обыкновенно рядъ не оказывается сходящимся. Изучая остаточный членъ, замѣчаемъ, что сначала, по мѣрѣ

увеличенiи m, его абсолютная величина уменьшается, и очень быстро, до извѣстнаго предѣла, но при дальнѣйшемъ увеличенiи m онъ опять начинаетъ расти и растетъ до безконечности. Ряды, обладающiе такимъ свойствомъ, называются полусходящимися. Обыкновенно наименьшая величина остаточнаго члена есть величина чрезвычайно малая, выражаемая въ седьмыхъ и восьмыхъ десятичныхъ знакахъ; R_m достигаетъ этой наименьшей величины при сравнительно не большомъ значенiи m. Всякiй разъ, когда обнаруживается эта особенность, формула весьма удобна для приближенныхъ вычисленiй: нѣсколько первыхъ членовъ ряда даютъ уже громадное приближенiе; нужно только умѣть выбрать найвыгоднѣйшее членовъ число, которое можетъ быть даже и очень не велико

§15. Нѣкоторыя главнѣйшiя свойства функцiи Бернулли.

Функцiя Бернулли есть цѣлый многочленъ выраженный формулой (13) прошлаго параграфа. Непосредственно видно, что при $t = 0$ правая часть формулы (13) обращается въ нуль, слѣдовательно $\varphi_n(0) = 0 \ldots (1)$

При $t = 1$ правая часть равенства (13) дѣлается равной лѣвой части послѣдняго изъ уравненій (1) прошлаго §-а, поэтому

$$\varphi_n(1) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Возьмемъ производную отъ функціи $\varphi_n(t)$, дифференцируя формулу (13) прошлаго §-а, получимъ слѣдующее

$$\varphi_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{n-1!} + \frac{A_1 t^{n-2}}{n-2!} + \frac{A_2 t^{n-3}}{n-3!} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{1} t + A_{n-1}$$

Всѣ члены правой части, кромѣ послѣдняго, представляютъ собою опять функцію Бернулли, но только съ индексомъ, на единицу меньшимъ, это есть $\varphi_{n-1}(t)$, отсюда тождество

$$\varphi_n'(t) = \varphi_{n-1}(t) + A_{n-1}$$

Интегрируемъ обѣ части этого тождества по t въ предѣлахъ отъ 0 до 1, получимъ

$$\varphi_n(1) - \varphi_n(0) = \int_0^1 \varphi_{n-1}(t)\,dt + A_{n-1} \cdot 1$$

На основаніи формулъ (1) и (2) лѣвая часть полученнаго равенства есть нуль, такъ что

$$\int_0^1 \varphi_{n-1}(t)\,dt = -A_{n-1}$$

равенство это есть тождество, оно справедливо при всякомъ n, слѣдовательно въ обѣихъ частяхъ его можно замѣнить n черезъ $n+1$, равенство получитъ видъ:

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = -A_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Мы знаемъ, что Эйлеровы коэффиціента

съ нечетными индексами всѣ равны нулю, слѣдовательно при

$$n = 2m+1$$

равенство (3) дастъ соотношеніе вида

$$\int_0 \varphi_{2m+1}(t)dt = 0 \; .... \quad (4)$$

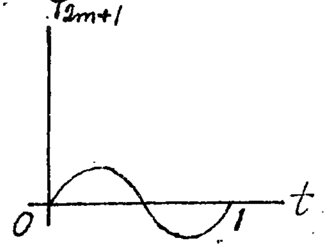
При n четномъ ($n=2m$) Эйлеровы коэффиціенты A_{2m} выражаются черезъ коэффиціенты Бернулли формулой

$$A_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{B_{2m-1}}{2m!}$$

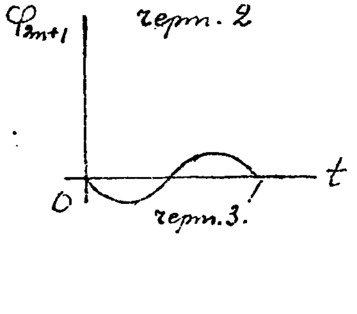
слѣдовательно формула (3) для этого случая перепишется слѣдующимъ образомъ

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)dt = (-1)^{m} \frac{B_{2m-1}}{2m!} \; ..... \quad (5)$$

Изъ формулы (4) прямо видно, что функція φ_{2m+1} въ предѣлахъ интеграла отъ 0 до 1 не можетъ сохранять одинъ и тотъ же знакъ: она не есть тождественный нуль, а интегралъ оказывается нулемъ. Болѣе подробныя изслѣдованія показываютъ, что въ предѣлахъ отъ 0 до 1 функція $\varphi_{2m+1}(t)$ обращается въ нуль только однажды: при $t = \frac{1}{2}$, такъ что кривая, выражающая теченіе ф-іи въ промежуткѣ между 0 и 1 имѣетъ форму волны какъ представлено на черт. 2 или на черт. 3 смотря по тому, четное или нечетное m. Изъ формулы (5) видно, что $\varphi_{2m}(t)$ въ предѣлахъ интеграла отъ 0 до 1

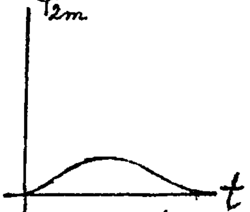


черт. 2

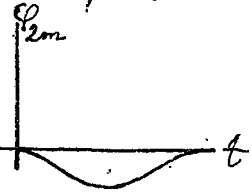


черт. 3.

можетъ и не мѣняя своего знака, такъ какъ интегралъ отъ нуля отличенъ. Болѣе подробныя изслѣдованія показываютъ, что функція $\varphi_{2m}(t)$ въ предѣлахъ интеграла сохраняетъ свой знакъ все время. Въ такомъ случаѣ этотъ знакъ такой же, какъ знакъ правой части, а такъ какъ B_{2m-1} и $2m!$ положительны, то знакъ функціи $\varphi_{2m}(t)$ опредѣляется величиной $(-1)^m$. Если m четно, всѣ значенія функціи φ_{2m} въ предѣлахъ интеграла положительны, теченіе функціи такого рода выражается кривой такого вида какъ на черт (4). Когда m нечетно, то функція въ предѣлахъ интеграла все время отрицательна; теченіе ея представлено на черт. (5).



черт. 4



черт. 5

Изученіе свойствъ функціи Бернулли даетъ возможность судить и объ остаточномъ членѣ (12) прошлаго параграфа. Оказывается, что если функціи $f^{(2m)}(x+t-1)$ и $f^{(2m-2)}(x+t-1)$ при измѣненіи t отъ 0 до 1 и x отъ a до b сохраняютъ все время одинъ и тотъ же знакъ, одинаковый для обѣихъ функцій $f^{(2m)}(x+t-1)$ и $f^{(2m-2)}(x+t-1)$, то остаточный членъ (12) по абсолютной величинѣ всегда меньше того члена ряда (11), который непосредственно слѣдовалъ бы за послѣднимъ изъ удержанныхъ членовъ этого ряда. Въ формулѣ (11) прош-

лаю 8-и. Этотъ членъ первый изъ отбрасываемыхъ членовъ ряда, выразится такимъ образомъ

$$\frac{B_{2m-1}}{2m!}\left\{f^{(2m-1)}(b)-f^{(2m-1)}(a)\right\}(-1)^m$$

Остаточный членъ можно представить въ видѣ этого выраженія, помноженнаго на θ, гдѣ θ есть правильная дробь, т. е.

$$\theta\cdot\frac{B_{2m-1}}{2m!}\left\{f^{(2m-1)}(b)-f^{(2m-1)}(a)\right\}(-1)^m$$

Сначала члены формулы Эйлера быстро убываютъ по абсолютной величинѣ. Если мы хотимъ воспользоваться формулой наивыгоднѣйшимъ образомъ, то надо разыскать тотъ членъ этого ряда, который имѣетъ наименьшую величину, и остановиться непосредственно передъ нимъ; ошибка, которую мы сдѣлаемъ, будетъ меньше перваго изъ отбрасываемыхъ членовъ.

§ 19. Формула Стирлинга.

Возьмемъ формулу Маклорена-Эйлера

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_a^b f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{2}+\sum^{m-1}(-1)^l\frac{B_{2l-1}}{2l!}\left\{f^{(2l-1)}(b)-f^{(2l-1)}(a)\right\}+R_m\ldots(1)$$

Остаточный членъ R_m равенъ первому изъ отбрасываемыхъ членовъ, умноженному на правильную дробь θ, именно

$$R_m=\theta\cdot\frac{B_{2m-1}}{2m!}\left\{f^{(2m-1)}(b)-f^{(2m-1)}(a)\right\}(-1)^m\ldots(2)$$

при условіи, чтобы функція $f^{(2m)}(x+t-1)$ при всевозможныхъ x отъ a до b сохраняла одинъ и тотъ

же знакъ при измѣненіи t отъ нуля до единицы, и чтобы тотъ же знакъ при тѣхъ же условіяхъ имѣла и производная $f^{2m-2}(x+t-1)$.

Примѣнимъ формулу (1) къ случаю, когда

$$f(x) = \lg x \ldots\ldots (3)$$

при этомъ пусть $a=1$, $b=n$, гдѣ n какое угодно цѣлое положительное число. Формула попреимуществу примѣняется къ случаю, когда n число весьма (но не безконечно) большое: поэтому этотъ случай, главнымъ образомъ, мы и будемъ имѣть въ виду. Заготовимъ всѣ необходимыя для подстановки въ формулу (1) выраженія:

$$f(x) = \lg x,$$

$$\int_1^n \lg x\, dx = \Big|_1^n x\lg x - \int_1^n x\cdot\frac{1}{x}dx = n\lg n - n + 1$$

$\sum_1^n \lg x$ согласно съ однимъ изъ прошлыхъ §-овъ представится въ видѣ

$$\sum_1^n \lg x = \sum_{x=1}^{x=n-1} \lg x = \lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots \lg(n-1) = \lg(1.2.3\ldots\overline{n-1})$$

Прибавимъ и вычтемъ въ правой части $\lg n$, тогда

$$\sum_1^n \lg x = \lg(1.2.3\ldots\overline{n-1}) + \lg n - \lg n = \lg(n!) - \lg n.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{2} = \frac{\lg n - \lg 1}{2} = \frac{1}{2}\lg n$$

Находимъ выраженіе производныхъ отъ логарифма

$$\frac{d}{dx}\lg x = x^{-1};\ \frac{d^2}{dx^2}\lg x = -1.x^{-2};\ \frac{d^3}{dx^3}\lg x = 1.2x^{-3}\ldots\ldots$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\lg x = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots(k-1)x^{-k}$$

Вставляемъ всѣ найденныя выраженія въ формулу (1)

$$n\lg n - n + 1 = \lg(n!) - \frac{1}{2}\lg n + \sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l}\frac{B_{2l-1}.(-1)^{2l}.1.2\ldots 2l-2}{1.2\ldots(2l-2)(2l-1)2l}\left(\frac{1}{n^{2l-1}}-1\right)+R_m$$

Такъ какъ

$$\frac{d^{2m}\lg x}{dx^{2m}} = -1.2\ldots(2m-1)x^{-2m}$$

и

$$\frac{d^{2m-2}\lg x}{dx^{2m-2}} = -1.2\ldots(2m-3)x^{-2m+2}$$

при всякомъ положительномъ x имѣютъ одинаковый знакъ минусъ, то остаточный членъ R_m выразится по формулѣ (2)

$$R_m = (-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}\left(\frac{1}{n^{2m-1}}-1\right)$$

Перенесемъ всѣ члены правой части предпослѣдней формулы, полученной изъ (1), кромѣ перваго влѣво и вставимъ вмѣсто остаточнаго члена его выраженіе.

$$\lg(n!) = n\lg n - n + 1 + \frac{1}{2}\lg n + \sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l(2l-1)}\left(\frac{1}{n^{2l-1}}-1\right)$$

$$+\,\theta(-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}\left(\frac{1}{n^{2m-1}}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Формула (4) даетъ намъ выраженіе логарифма произведенія натуральныхъ чиселъ въ видѣ ряда съ формулой остаточнаго члена. Это выраженіе и есть формула Стирлинга, но только для упрощенія ее нѣсколько преобразуютъ, — этимъ мы и займемся. Въ правой части формулы (4) одни члены суть ф-іи n,

другіе же свободна отъ него; соединяя эти свободные отъ n члены вмѣстѣ, обозначимъ ихъ сумму буквой C; это будетъ величина, постоянная относительно n. Формула приметъ видъ:

$$lg(n!) = n\,lg\,n - n + \frac{1}{2}lg\,n + \sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l(2l-1)}\cdot\frac{1}{n^{2l-1}} +$$

$$+\ \theta.(-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}\frac{1}{n^{2m-1}} + C \ldots\ldots (5)$$

Вычислимъ величину C. Прежде всего замѣтимъ, что члены подъ знакомъ S а также остаточный членъ содержатъ въ себѣ n въ знаменатель въ цѣлой положительной степени; при n безконечно большомъ всѣ эти члены безконечно малы; обозначимъ временно ихъ сумму буквой ε. Величина ε безконечно мала при n безконечно большомъ, формула (5) принимаетъ видъ

$$lg(n!) = n\,lg\,n - n + \frac{1}{2}lg\,n + C + \varepsilon \ldots\ldots (6)$$

Равенство (6) справедливо при всякомъ n, цѣломъ и положительномъ, оно останется справедливымъ, если вмѣсто n вставимъ $2n$; при этомъ ε измѣнится, оно замѣнится новой безконечно малой величиной ε', тогда получится

$$lg(2n!) = 2n\,lg\,2n - 2n + \frac{1}{2}lg\,2n + C + \varepsilon' \ldots (7)$$

Припомнимъ формулу Валлиса, которая выражаетъ $\frac{\pi}{2}$ въ видѣ безконечнаго произведенія: $\frac{\pi}{2} = \frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}$

Формула справедлива при $n=\infty$. Станемъ преобразовывать ее; прежде всего извлекаемъ квадратный корень

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

Въ знаменатель входятъ только нечетныя числа; вставимъ между каждыми двумя рядомъ стоящими нечетными множителями знаменателя содержащееся между ними четное число, а чтобы дробь не изменилась, такихъ же множителей добавимъ въ числитель; получится

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{2.4.6\ldots 2n.2.4.6\ldots 2n}{1.2.3.4.5\ldots 2n-1.2n\sqrt{2n+1}}=\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{1.2.3\ldots 2n\sqrt{2n+1}}$$

Каждый множитель числителя делится на два, всѣ эти двойки мы выделимъ и соберемъ вместе; число множителей въ числителе есть n, 2 войдетъ множителемъ n разъ, но такъ какъ въ числителе произведение въ квадрате, то 2 войдетъ множителемъ всего $2n$ разъ

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{2^{2n}(1.2.3\ldots n)^2}{1.2.3\ldots 2n\sqrt{2n+1}}$$

$\sqrt{2n+1}$ можно представить въ видѣ $\sqrt{2n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}$, послѣ чего формула напишется такъ

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!\sqrt{2n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}\ \ldots\ldots (8)$$

Формула (8) справедлива только при $n=\infty$. Логарифмируемъ ее

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2}=2n\lg 2+2\lg(n!)-\lg(2n!)-\frac{1}{2}\lg 2n-\frac{1}{2}\lg\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

Выраженіе это, такъ же какъ и (8), справедли-

во лишь при $n=\infty$; разность между левой и правой частью этого равенства, при n = конечному числу, не есть нуль, она обращается в нуль для $n=\infty$. Обозначим эту разность буквой η', тогда будем иметь абсолютно строгое равенство

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2} = 2n\lg 2 + 2\lg(n!) - \lg(2n!) - \frac{1}{2}\lg 2n - \frac{1}{2}\lg\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \eta' \ldots (9)$$

где η' безконечно мало при n безконечно большом. Член $\frac{1}{2}\lg\left(1+\frac{1}{2n}\right)$, предшествующий η', при $n=\infty$ тоже равен нулю, он тоже безконечно мал при n безконечно большом, его можно присоединить к члену η' и обозначить сумму двух последних членов буквой η

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2} = 2n\lg 2 + 2\lg(n!) - \lg(2n!) - \frac{1}{2}\lg 2n + \eta \ldots (10)$$

Для нахождения величины постоянной C мы вставим в правой части равенства (10) вместо $\lg(n!)$ и $\lg(2n!)$ их выражения (6) и (7), при этом мы увидим, что все члены, содержащие в себе n, сами собой сокращаются, и останутся только постоянные относительно n члены, в том числе и неизвестное C, которое отсюда и определится. Выполним это

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2} = 2n\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 2 - \frac{1}{2}\lg n + \eta + 2n\lg n - 2n + 2C + 2\varepsilon - \varepsilon'$$
$$-2n\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 2 + \lg n \quad -2n\lg n + 2n - C$$
$$-\frac{1}{2}\lg n$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2} = \quad -\lg 2 \quad + \eta \quad + C + 2\varepsilon - \varepsilon'$$

Перенесем все постоянные члены влево, оста-

вивъ въ правой части только безк. малыя

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2}+\lg 2-C=\eta+2\varepsilon-\varepsilon' \ldots\ldots \quad (11)$$

Всѣ члены въ правой части безконечно малы при n безконечно большомъ, лѣвая часть въ себѣ n не содержитъ и есть величина постоянная; постоянная величина не можетъ быть безконечно малой, равенство возможно только, когда безконечно малыя въ суммѣ даютъ тождественный нуль, слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2}+\lg 2 = C \ldots \quad (12)$$

Преобразуемъ лѣвую часть

$$\frac{1}{2}\left(\lg\frac{\pi}{2}+2\lg 2\right) = C\,; \quad \frac{1}{2}\lg 2\pi = C\,;$$

$$C = \lg\sqrt{2\pi} \ldots\ldots \quad (13)$$

Такова величина этой постоянной. Остается ее вставить въ формулу (5); мы получаемъ окончательный видъ формулы Стирлинга:

$$\lg(n!)=\lg n^n+\lg\sqrt{n}+\lg\sqrt{2\pi}-n+\sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l(2l-1)}\cdot\frac{1}{n^{2l-1}}+$$

$$+\theta(-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}\cdot\frac{1}{n^{2m-1}}$$

Первые три члена лѣвой части соединяются вмѣстѣ

$$\lg(n!)=\lg\left\{n^n\sqrt{2\pi n}\right\}-n+\sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l(2l-1)}\cdot\frac{1}{n^{2l-1}}+$$

$$+\theta(-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}\cdot\frac{1}{n^{2m-1}} \ldots\ldots \quad (14)$$

Равенство (14) даетъ возможность сравнительно очень легко и чрезвычайно точно вычислить

$lg(n!)$; выраженіе $n! = 1.2 \ldots n$ при n весьма большомъ, напр. при $n = 1000$, было бы громаднымъ числомъ, вычислить его непосредственнымъ перемноженіемъ представлялось бы въ высшей степени трудною задачей, а если пользоваться таблицей логариѳмовъ, то пришлось бы взять 1000 приближенно вычисленныхъ логариѳмовъ, сложились бы 1000 ошибокъ, результатъ былъ бы негодный. Формула (14) все дѣло сводитъ къ вычисленію логариѳма, сравнительно незначнаго.

Посмотримъ, какова ошибка, указываемая этой формулой. Вопросъ этотъ рѣшается разсмотрѣніемъ остаточнаго члена. Для опредѣленности пусть $n = 1000$, если бы мы взяли $m = 1$ т. е. совсѣмъ бы отбросили всѣ члены ряда входящіе въ сумму формулы (14) ошибка выразилась бы величиной

$$\theta \cdot \frac{B_1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1000}$$

Такъ какъ B_1, какъ мы видѣли, равно $\frac{1}{6}$, а θ есть правильная дробь то допускаемая нами въ данномъ случаѣ ошибка будетъ меньше $\frac{1}{12000}$ — приближеніе очень большое, и вообще, при какомъ бы то ни было n, полагая въ формулѣ (14) $m = 1$ мы представимъ ее въ слѣдующемъ видѣ

Лит. Конц. разрѣш. т-ва Лахтина

лист 6

Лит. О. Д. М. Н.

$$\lg(n!) = \lg\{n^n\sqrt{2\pi n}\} - n + \frac{\theta}{12n} \quad \dots \quad (15)$$

Если бы m равнялось двумъ, то ошибка выразилась бы

$$-\frac{\theta . B_3}{4.3.n^3}$$

при $n = 1000$, если принять во вниманіе, что $B_3 = \frac{1}{30}$, получимъ слѣдующую ошибку

$$-\theta . \frac{1}{360.000.000.000}$$

Если въ форм. (14) выполнить переходъ отъ логарифма къ числамъ, формула приметъ видъ

$$n! = n^n\sqrt{2\pi n} . e^{-n} . e^{\sum_{l=1}^{l=m-1}(-1)^{l+1}\frac{B_{2l-1}}{2l(2l-1)}.\frac{1}{n^{2l-1}} + \theta(-1)^{m+1}\frac{B_{2m-1}}{2m(2m-1)}.\frac{1}{n^{2m-1}}} \quad \dots (16)$$

Это формула Стирлинга въ томъ видѣ, какъ обыкновенно ее пишутъ. Если положить въ ней $m = 1$, получимъ

$$n! = n^n\sqrt{2\pi n} . e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad \dots \quad (17)$$

Примѣняется форм. Стирлинга преимущественно въ послѣднемъ видѣ; если же n число большое, то опускаютъ кромѣ того, множитель $e^{\frac{\theta}{12n}}$, считая его за единицу; тогда формула принимаетъ видъ

$$n! = n^n\sqrt{2\pi n} . e^{-n} \quad \dots \quad (18)$$

Формула (17) абсолютно строгая, формула (18) приближенная: остаточный членъ въ ней опущенъ. Въ приложеніяхъ обыкновенно пользуются формулой (18).

§ 20. Интерполяція.

Въ приложеніяхъ Математики къ экспериментальнымъ наукамъ часто бываетъ, что аналитическое выраженіе изучаемой ф-іи намъ совершенно неизвѣстно; ищется зависимость между двумя перемѣнными величинами, наблюдаемыми въ природѣ, одна изъ нихъ есть функція другой. Измѣряя величину ф-іи для различныхъ числовыхъ величинъ независимаго перемѣннаго, мы можемъ результаты измѣреній записать, расположивъ въ таблицу. Спрашивается, нельзя ли по этому опытному матеріалу найти видъ и аналитическое выраженіе наблюдаемой ф-іи. Формулы, которыя такимъ образомъ составятся, назыв аются эмпирическими формулами, а задача ихъ составленія и есть задача интерполяціи.

Пусть, напр., неизвѣстное намъ выраженіе ф-іи мы обозначили символомъ $f(x)$; произведенныя измѣренія величины этой ф-іи

при $x = x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}, x_{n-1} \ldots\ldots$ (1)

оказались слѣдующими числовыми величинами

$$a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} \ldots\ldots \quad (2)$$

Ф-ія $f(x)$ при величинахъ x, заключающихся въ рядѣ (1), должна получать соотвѣтствующее значеніе изъ ряда (2); кромѣ этого

требованія да еще требованія непрерывности функціи $f(x)$, мы никакихъ условій не имѣемъ, — ищется видъ ф-іи $f(x)$. Ясно, что задача неопредѣленна, она имѣетъ безконечное число рѣшеній. Мы можемъ взять любое аналитическое выраженіе съ n произвольными коэффиціентами, вставляемъ въ это выраженіе по очереди значенія x (1) и приравниваемъ каждый разъ полученное выраженіе соотвѣтствующимъ величинамъ ряда (2); составится n ур-ій для опредѣленія n неизвѣстныхъ коэф-овъ; дѣло сведется къ рѣшенію ур-ій. Какимъ видомъ ф-іи слѣдуетъ задаться, это въ значительной мѣрѣ зависитъ отъ характера тѣхъ числовыхъ величинъ, которыя дали измѣренія, въ значительной степени [illegible] это и отъ искусства вычислителя. Но естественнѣе брать выраженіе попроще, почему слѣдуетъ посмотрѣть, нельзя ли $f(x)$ представить въ видѣ цѣлаго многочлена, расположеннаго по степенямъ x, въ этомъ многочленѣ должно быть n коэф-овъ, онъ долженъ быть потому $n-1$ степени, т. е. $f(x)$ будетъ имѣть видъ

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_{n-1} x^{n-1} \dots (3)$$

для опредѣленія коэф-овъ A придется рѣшить систему n ур-ій первой степени съ n неизвѣстными. На формулу (3) можно смотрѣть и съ такой точки зрѣнія: она представляетъ собою n первыхъ членовъ разложенія ф-іи $f(x)$

въ степенной рядъ. Если аргументъ x число небольшое, то приближеніе можетъ быть довольно значительное.

Разсмотримъ наиболѣе простые способы интерполяціи только что указаннаго типа, такъ называемой, параболической интерполяціи, такъ какъ теченіе искомой ф-іи выразится кривой

$$y = f(x) \quad \ldots \quad (4)$$

гдѣ $f(x)$ цѣлый многочленъ, кривая (4) есть парабола $n-1$ порядка. Простѣйшіе пріемы для рѣшенія этой задачи носятъ названіе: одинъ — способъ Лагранжа, другой — способъ Ньютона. Мы и разсмотримъ эти оба способа.

Способъ Лагранжа.

Составимъ выраженіе

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})\ldots \quad (5)$$

Это многочленъ $n^{\text{й}}$ степени, въ которомъ всѣ коэф-ты намъ извѣстны, обозначимъ его символомъ $\varphi(x)$. Многочленъ $\varphi(x)$ извѣстный намъ многочленъ n степени. Возьмемъ выраженіе $\frac{\varphi(x)}{x-x_h}$, гдѣ h одно изъ чиселъ ряда $0, 1, 2 \ldots n-1$, такъ что x_h одно изъ чиселъ ряда (1); дѣленіе выполнится нацѣло, въ частномъ будетъ многочленъ $n-1$ степени

$$\frac{\varphi(x)}{x-x_h} = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{h-1})(x-x_{h+1})\ldots(x-x_{n-1})\ldots (6)$$

при $x = x_h$ величина этого многочлена отлична отъ нуля и конечна, она выразится такъ

$(x_h - x_0)(x_h - x_1)\ldots\ldots(x_h - x_{h-1})(x_h - x_{h+1})\ldots\ldots(x_h - x_{n-1})$

Это величина, намъ извѣстная; ее же можно выразить иначе, если обратить вниманіе на лѣвую часть тождества (6); при $x = x_h$ она получаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, истинная ея величина найдется по правилу l'Hospital-я, т.е. вставивъ величину x_h въ формулу $\frac{\varphi'(x)}{1}$, такъ что

$$\varphi'(x_h) = (x_h - x_0)(x_h - x_1)\ldots(x_h - x_{h-1})(x_h - x_{h+1})\ldots(x_h - x_{n-1}) \cdot (7)$$

при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ x, заключающихся въ рядѣ чиселъ (1), кромѣ x_h, ф-ія (6) будетъ нулемъ. Возьмемъ выраженіе

$$\frac{1}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_h}$$

Это цѣлый многочленъ $n-1$ степени, обладающій такимъ свойствомъ: при всѣхъ значеніяхъ x ряда (1) онъ будетъ 0, исключая $x = x_h$, когда взятое выраженіе обращается въ единицу. Умножимъ его на a_h, получимъ

$$\frac{a_h}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_h} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

гдѣ a_h есть число ряда (2), соотвѣтствующее x_h; ф-ія (8) обладаетъ такимъ свойствомъ: это многочленъ $n-1$ степени съ извѣстными коэф-ами; она обращается въ нуль при всѣхъ числахъ ряда (1) кромѣ x_h; при $x = x_h$ она равна a_h. Въ формулѣ (8) дадимъ поочередно h значенія $0, 1, 2 \ldots n-1$ и всѣ полученныя формулы складываемъ; результатъ сокращенно можно написать такъ

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{a_h}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_h} \ldots\ldots \quad (9)$$

Выраженіе (9) есть сумма n цѣлыхъ многочленовъ n-1 степени. Это цѣлый многочленъ n-1 степени; когда x сдѣлается равнымъ одному изъ чиселъ ряда (1), положимъ x_h, то всѣ члены суммы (9) обратятся въ нуль, кромѣ одного, соотвѣтствующаго x_h, и этотъ членъ будетъ равенъ a_h; если такъ то форм (9) есть рѣшеніе поставленной задачи. Мы вправѣ написать

$$f(x) = \sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{a_h}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_h} \ldots \qquad (10)$$

Это и есть формула Лагранжа.

Способъ Ньютона.

Числа ряда (1) взяты какъ угодно и формула (10) даетъ намъ рѣшеніе задачи для всевозможныхъ значеній чиселъ ряда (1). Этимъ произволомъ можно воспользоваться или 1) для достиженія возможно большей точности результата или 2) для возможнаго упрощенія формулы. Первая изъ этихъ задачъ была рѣшена Гауссомъ; на ней мы не будемъ останавливаться въ виду сложности соображеній и разсмотримъ ближе второй способъ, способъ Ньютона, имѣющій цѣлью упростить рѣшеніе задачи.

Формула Ньютона относится только къ случаю, когда промежутки между числа-

ми ряда (1) одинаковы; пусть эти числа расположены въ возрастающемъ порядкѣ и пусть

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{n-1} - x_{n-2} = h$$

Числа x_0 и h какія угодно; мы всегда можемъ преобразовать перемѣнное такъ, чтобы $x_0 = 0$, а $h = 1$; въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$x = x_0 + ht$$

тогда значеніямъ x ряда (1) будутъ отвѣчать значенія t, соотвѣтственно равныя $0, 1, 2 \ldots n-1$. Первое значеніе аргумента t есть нуль, разность между смежными значеніями равна 1. Чтобы не вводить новой буквы t, мы можемъ представить себѣ дѣло такъ, что перемѣнное x уже заранѣе было выбрано такимъ образомъ, что величина функціи намъ извѣстна для

$$x = 0, 1, 2, \ldots n-4, n-3, n-2, n-1 \ldots \quad (11)$$

соотвѣтствующія величины ф-іи $f(x)$ мы попрежнему обозначимъ

$$f(x) = a_0, a_1, a_2 \ldots a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} \ldots \quad (12)$$

Припомнимъ, что ф-ію $f(x)$ можно разложить въ рядъ по ф-іямъ факторіальнымъ (§ 15); мы видѣли, что разложеніе это таково

$$f(x) = f(0) + \frac{x^{(1)}}{1}\Delta f(0) + \frac{x^{(2)}}{2!}\Delta^2 f(0) + \frac{x^{(3)}}{3!}\Delta^3 f(0) + \ldots \frac{x^{(n-1)}}{n-1!}\Delta^{n-1} f(0)$$

$$+ \frac{x^{(n)}}{n!}\Delta^n f(0) + \ldots$$

Если ф-ія какая-нибудь, то рядъ будетъ безко-

нечнымъ; но такъ какъ мы задались мыслью, чтобы искомая ф-ія $f(x)$ была цѣлымъ многочленомъ n-1 степени, то этотъ рядъ самъ собою кончится тѣмъ членомъ, гдѣ входитъ факторьяльная ф-ія $x^{(n-1)}$ и тогда равенство представится въ слѣдующемъ видѣ

$$f(x) = f(0) + \frac{x^{(1)}}{1}\Delta f(0) + \frac{x^{(2)}}{2!}\Delta^2 f(0) + \frac{x^{(3)}}{3!}\Delta^3 f(0) + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{n-1!}\Delta^{n-1} f(0) \ldots (13)$$

Если бы намъ удалось найти величины $f(0)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0) \ldots \Delta^{n-1} f(0)$, то мы бы вставили ихъ въ (13) и задача тѣмъ самымъ была бы рѣшена; все дѣло въ нахожденіи этихъ коэф-овъ $f(0)$, $\Delta f(0) \ldots$

Согласно условію

$$f(0) = a_0$$

кромѣ того намъ извѣстны величины

$$f(1);\ f(2) \ldots\ f(n-1)$$

т. е. цѣлый рядъ измѣненныхъ значеній ф-іи; въ началѣ курса мы видѣли, что разность различныхъ порядковъ выражается черезъ измѣненные значенія ф-іи; можно было бы примѣнить эту формулу; но задача рѣшается еще проще. Выпишемъ числа ряда (12)

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ a_{n-4},\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1} \ldots (12)$$

Эти числа соотвѣтственно равны

$$f(0), f(1), f(2), f(3) \ldots f(n-4), f(n-3), f(n-2), f(n-1) \ldots (14)$$

Вычтемъ въ рядѣ (12) каждое предшествующее число изъ своего послѣдующаго и обозначимъ получаемые результаты буквами

$b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots \quad b_{n-4}, b_{n-3}, b_{n-2} \ldots (12')$

Числовыя величины буквъ b намъ извѣстны, мы находимъ ихъ непосредственнымъ вычитаніемъ; этимъ количествамъ соотвѣтственно равны

$\Delta f(0), \Delta f(1), \Delta f(2), \Delta f(3) \ldots \Delta f(n-4), \Delta f(n-3), \Delta f(n-2) \ldots (14')$

Надъ числами ряда (12') совершаемъ то же самое: вычитаемъ каждое предшествующее изъ стоящаго справа; числовыя величины результатовъ обозначимъ буквами:

$C_0, C_1, C_2 \ldots \quad C_{n-4}, C_{n-3} \ldots (12'')$

Эти величины намъ извѣстны, онѣ нашлись прямымъ вычитаніемъ; аналитическій смыслъ ихъ таковъ

$\Delta^2 f(0), \Delta^2 f(1), \Delta^2 f(2), \Delta^2 f(3) \ldots \Delta^2 f(n-4), \Delta^2 f(n-3) \ldots (14'')$

Надъ числами ряда (12'') совершаемъ то же самое обозначая результаты вычитанія буквой d съ индексами

$d_0, d_1, d_2 \ldots \quad d_{n-4} \ldots (12''')$

аналитическій смыслъ этихъ величинъ

$\Delta^3 f(0), \Delta^3 f(1), \Delta^3 f(2) \ldots \Delta^3 f(n-4) \ldots (14''')$,

и т. д. Продолжая такъ поступать далѣе, мы найдемъ послѣдующія строчки, третья отъ конца будетъ

i_0, i_1, i_2

и аналитическій смыслъ

$\Delta^{n-3} f(0), \Delta^{n-3} f(1); \Delta^{n-3} f(2)$

Слѣдующая: K_0, K_1, аналитическій смыслъ

$$\Delta^{n-2} f(0),\ \Delta^{n-2} f(1)$$

и наконецъ l_0, аналитическій смыслъ котораго $\Delta^{n-1} f(0)$. Соберемъ всѣ строчки

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} \ldots (12)$$

$$b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots b_{n-4}, b_{n-3}, b_{n-2} \ldots (12')$$

$$c_0, c_1, c_2, c_3 \ldots c_{n-4}, c_{n-3} \ldots (12'')$$

$$d_0, d_1, d_2, d_3 \ldots d_{n-4} \ldots (12''')$$

- - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$i_0, i_1, i_2$$

$$k_0, k_1,$$

$$l_0$$

Числа перваго столбца полученной таблицы выраженій (12), (12'), (12''), (12''')... т. е. числа

$$a_0, b_0, c_0, d_0 \ldots i_0, k_0, l_0 \ldots (15)$$

суть числовыя величины, аналитически выражающіеся черезъ

$$f(0), \Delta f(0), \Delta^2 f(0) \ldots \Delta^{n-3} f(0), \Delta^{n-2} f(0), \Delta^{n-1} f(0) \ldots (16)$$

Это какъ разъ искомые коэф-ты формулы (13). Вставимъ ихъ въ формулу (13), получится

$$f(x) = a_0 + b_0 x^{(1)} + c_0 \frac{x^{(2)}}{2!} + d_0 \frac{x^{(3)}}{3!} + \ldots k_0 \frac{x^{(n-2)}}{n-2!} + l_0 \frac{x^{(n-1)}}{n-1!} \ldots (17)$$

Это и есть формула Ньютона. Вычисленіе коэффиціентовъ ея сводится къ цѣлому ряду вычитаній, причемъ самое дѣйствіе удобно располагать въ таблицу, подобно (12), (12'), (12'')....

Разностныя уравненія.

§1. Понятіе о разностномъ ур-іи.

Пусть дано ур-іе вида

$$f(x, U_x, \Delta U_x, \Delta^2 U_x \dots \Delta^n U_x) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

гдѣ U_x есть неизвѣстная ф-ія. Уравненіе (1) связываетъ эту неизвѣстную ф-ію U_x, ея разности до n порядка включительно и перемѣнное x; такое ур-іе есть разностное ур-іе, а ф-ія U_x, удовлетворяющая ему называется интеграломъ этого ур-ія; найти ф-ію U_x, удовлетворяющую ур-ію, значитъ обинтегрировать его. Ур-іе (1) называется ур-іемъ $n^{\text{го}}$ порядка въ зависимости отъ порядка въ него входящей старшей разности. Ур-іе можетъ представиться въ иной формѣ, если разности различныхъ порядковъ выражаются черезъ измѣненныя значенія ф-іи; обозначимъ буквой D по прежнему символъ, дѣйствіе котораго выражается формулой

$$DU_x = U_{x+h},$$

мы можемъ выразить разности различныхъ порядковъ при посредствѣ символа D и вставивъ эти выраженія въ ур (1), получимъ ур-іе вида

$$F(x, U_x, DU_x, D^2U_x \dots D^nU_x) = 0 \quad \dots \quad (1')$$

Интегралъ ур-ія $n^{\text{го}}$ порядка будетъ содержать въ себѣ n произвольныхъ величинъ, какъ и интегралъ дифференціальнаго ур-ія n порядка, но только

тутъ эти произвольныя величины могутъ быть или постоянными величинами или произвольными ф-іями съ періодомъ h. Обозначая эти произвольныя ф-іи съ періодомъ h символами

$$\omega_1(x), \omega_2(x) \dots \quad \omega_n(x)$$

Мы представимъ интегралъ ур-іе въ формѣ

$$\Phi(x, U_x, \omega_1(x), \omega_2(x) \dots \omega_n(x)) = 0 \dots \quad (2)$$

Докажемъ, что изъ ур-іе (2) можно исключить всѣ эти ф-іи ω, и результатъ исключенія будетъ разностное ур-іе вида (1) или (1')

Замѣнимъ въ рав (2) x черезъ $x+h$; ф-іи ω отъ этого не измѣнятся: h служитъ для нихъ періодомъ, и получится

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x+h, DU_x, \omega_1(x), \omega_2(x) \dots \omega_n(x)) = 0 \\ &\text{Въ этомъ рав. снова замѣнимъ } x \text{ черезъ } x+h \\ &\Phi(x+2h, D^2U_x, \omega_1, \omega_2 \dots \omega_n) = 0 \\ &\Phi(x+3h, D^3U_x, \omega_1, \omega_2 \dots \omega_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Phi(x+nh, D^nU_x, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) = 0 \end{aligned}\right\} \dots (3)$$

Присоединивъ къ ур-ію (2) n ур-ій (3), мы можемъ всѣ ω исключить изъ $n+1$ ур-ій, въ результатѣ получится ур-іе вида (1'). Въ только что приведенныхъ разсужденіяхъ h было произвольно; какъ мы уже знаемъ, задачу всегда можно преобразовать такъ, чтобы h замѣнилось единицей, дѣлая подстановку вида $x = ht$; поэтому мы будемъ

считать $h=1$; кромѣ того замѣтимъ, что въ задачахъ, приводящихъ къ разностнымъ уравненіямъ, аргументъ x есть число цѣлое, мы будемъ его такимъ считать; тогда величины ф-ій $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\ldots$ будутъ постоянными.

§ 2. Линейныя разностныя ур-ія 1го порядка.

Такъ называются разностныя ур-іе вида

$$DU_x - p(x).U_x = q(x)\ldots\ (1)$$

гдѣ $p(x)$ и $q(x)$ суть данныя ф-іи x; $q(x)$ называется послѣднимъ членомъ ур-ія. Интегрируемъ ур-іе (1) такой же подстановкой, какъ въ дифференціальныхъ ур-іяхъ, полагая

$$U_x = V_x . W_x \ldots\ (2)$$

причемъ одну изъ этихъ ф-ій впослѣдствіи выберемъ по своему желанію, а другая будетъ новая неизвѣстная ф-ія; вставляемъ въ ур(1), получится

$$V_{x+1} W_{x+1} - p(x) V_x W_x = q(x)\ldots (3)$$

Мы знаемъ, что

$$W_{x+1} = W_x + \Delta W_x$$

вставляемъ это въ ур-іе (3), получимъ слѣдующее

$$V_{x+1} W_x + V_{x+1} \Delta W_x - p(x) V_x W_x = q(x)\ldots(4)$$

Въ лѣвой части рав (4) отберемъ тѣ члены, гдѣ выдѣлится множителемъ W_x, т.е. первый и

третій члены, они представятся въ такомъ видѣ

$$W_x(V_{x+1} - p(x) \cdot V_x)$$

выберемъ теперь ф-ію V_x такъ, чтобы выраженіе въ скобкахъ послѣдней формулы было нулемъ; тогда имѣетъ мѣсто равенство

$$V_{x+1} - p(x) V_x = 0 \ldots\ (5)$$

Ур-іе (4) упростится и приметъ видъ

$$V_{x+1} \Delta W_x = q(x) \ldots (6)$$

Выберемъ какую-нибудь ф-ію V_x, удовлетворяющую ур-ію (5) и внесемъ ее въ ур-іе (6). Изъ этого ур-ія будемъ имѣть

$$\Delta W_x = \frac{q(x)}{V_{x+1}}$$

откуда

$$W_x = \sum \frac{q(x)}{V_{x+1}} + \omega(x) \ldots (7)$$

гдѣ $\omega(x)$ произвольная ф-ія съ періодомъ 1.

Слѣдовательно дѣло сводится только къ нахожденію какой-нибудь ф-іи V_x, удовлетворяющей ур-ію (5). Займемся этимъ.

Ур-іе (5) можно представить въ такомъ видѣ: $\dfrac{V_{x+1}}{V_x} = p(x) \ldots\ (8)$

x — число цѣлое, даемъ въ обѣихъ частяхъ формулы (8) аргументу рядъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ величинъ $x_0, x_0+1, x_0+2, \ldots x-2, x-1$, гдѣ x_0 какое угодно цѣлое число. Выполнивъ рядъ такихъ подстановокъ, перемножаемъ полученныя равенства, находимъ

$$\frac{v_{x_0+1}\cdot v_{x_0+2}\cdot v_{x_0+3}\cdot\ldots v_{x-1}\cdot v_x}{v_{x_0}\cdot v_{x_0+1}\cdot v_{x_0+2}\cdot\ldots\cdot v_{x-1}} = p(x_0).p(x_0+1).p(x_0+2)\ldots p(x-2)p(x-1)$$

Сокращая имѣемъ

$$\frac{v_x}{v_{x_0}} = p(x_0).p(x_0+1).p(x_0+2)\ldots p(x-2).p(x-1)$$

Выраженіе въ правой части принято обозначать такъ

$$\frac{v_x}{v_{x_0}} = \prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(t) \ldots\ldots (9)$$

откуда

$$v_x = v_{x_0}\prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(x) \ldots (10)$$

причемъ v_{x_0} остается совершенно произвольнымъ, мы могли бы его замѣнить какимъ угодно числомъ, напр. единицей. Формула (10) и даетъ отвѣтъ на поставленный вопросъ относительно ф-іи v_x, ее надо ввести въ форм (7) и затѣмъ въ формулу (2) вставить оба выраженія (7) и (10), получится слѣдующее

$$u_x = v_{x_0}\prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(t)\left\{\sum \frac{q(x)}{v_{x_0}\prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(t)} + \omega(x)\right\}$$

Множитель v_{x_0} можно внести въ скобки; въ первомъ членѣ онъ сократится, во второмъ членѣ $v_{x_0}.\omega(x)$ остается произвольной ф-іей съ періодомъ 1, откуда еще разъ видно, что v_{x_0} какое угодно постоянное число, такъ что можно написать

$$u_x = \prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(t)\left\{\sum \frac{q(x)}{\prod_{t=x_0}^{t=x-1} p(t)} + \omega(x)\right\} \ldots (11)$$

Такова общая формула интеграла линейнаго разностнаго уравненія (1).

Примѣръ. $DU_x-(x+1)U_x = 1.2.3..x(x+1)$. Дѣлаемъ подстановку: $U_x=V_xW_x$ получимъ слѣдующее

$$V_{x+1}W_x + V_{x+1}\Delta W_x - (x+1)V_xW_x = 1.2.3..x(x+1)$$

Отбираемъ члены съ W_x и приравниваемъ множитель при немъ нулю, находимъ: $V_{x+1} = (x+1)U_x$ ......(α)

тогда ур-іе приметъ видъ $V_{x+1}\Delta W_x = 1.2.3..x(x+1)$...($\beta$)

Уравненіе (α) даетъ: $\frac{V_{x+1}}{V_x} = x+1$. Даемъ аргументу послѣдовательно значенія $1, 2, \dots x-1$, тогда послѣ перемноженія всѣхъ получающихся отсюда формулъ будемъ имѣть

$\frac{V_x}{V_{x_0}} = 1.2.3\dots x$; V_{x_0} можно положить равнымъ единицѣ:

$$V_x = 1.2.3\dots x\ ;\ \Delta W_x = \frac{1.2.3\dots x(x+1)}{V_{x+1}} = \frac{1.2.3\dots x(x+1)}{1.2.\dots x(x+1)} = 1$$

$\Delta W_x = 1$, откуда $W_x = x^{(1)}+\omega(x)$. Общій интегралъ приметъ слѣдующій видъ: $U_x = \{x+\omega(x)\}.1.2.3\dots x$.

Возьмемъ частный случай, когда коэффиціентъ линейнаго ур-іе 1го порядка при U_x есть величина постоянная.

Пусть дано ур-іе: $DU_x - aU_x = q(x)$ .... (12)

Положимъ: $U_x = a^{x-1}V_x$ .... (13)

гдѣ a число постоянное, входящее въ ур. (12), вставимъ въ ур-іе, находимъ: $a^xV_{x+1} - a^xV_x = q(x)$; дѣлимъ обѣ части на a^x, получаемъ $V_{x+1}-V_x = a^{-x}q(x)$. Въ лѣвой части мы имѣемъ конечную разность $\Delta V_x = a^{-x}q(x)$; выполняемъ дѣйствіе Σ, находимъ

$$V_x = \sum a^{-x}q(x) + \omega(x)$$

гдѣ ω произвольная ф-іе съ періодомъ 1. Вставляемъ это въ форм. (13), находимъ

$$U_x = a^{x-1}\sum a^{-x}q(x) + a^{x-1}\omega(x)\ \dots\dots (14)$$

Таковъ общій интегралъ диф-аго ур-іе (12). Не мѣшаетъ

Литогр. Общ. Распростр. Полезн. Книг.

замѣтить одинъ частный случай, когда послѣдняя часть ур-я равна нулю $DU_x - aU_x = 0$ ..... (12′). Интегралъ этого ур-ія найдемъ по форм. (14), первый членъ обращается въ нуль, интегралъ будетъ: $U_x = a^{x-1}\omega(x)$ .... (14′)

Результаты (14) и (14′) служатъ интегралами ур-ій (12) и (12′); удобнѣе представить полученныя формулы въ символическомъ видѣ. Въ ур-іи (12) въ лѣвой части вынесемъ U_x символически за скобку, какъ это мы дѣлали въ началѣ курса, получимъ равенство $(D-a)U_x = q(x)$ ..... (15)

$D-a$ можно разсматривать, какъ одинъ символъ нѣкотораго дѣйствія; задача прочтется такъ: найти ф-ію U_x которая подъ вліяніемъ дѣйствія $D-a$ превращается въ $q(x)$. Мы можемъ обозначить однимъ символомъ символъ дѣйствія, противоположнаго $D-a$, т.е. такое дѣйствіе, которое уничтожается дѣйствіемъ символа $D-a$; обозначимъ это дѣйствіе такъ: $(D-a)^{-1}$; $(D-a)^{-1}$ уничтожаетъ дѣйствіе $D-a$, символически это выразится такъ: $(D-a)^{-1}(D-a)U_x = U_x$ или, какъ обыкновенно дѣлаютъ, пишутъ просто

$$(D-a)^{-1}(D-a) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Совершаемъ надъ обѣими частями рав. (15) дѣйствіе $(D-a)^{-1}$, получится: $U_x = (D-a)^{-1}q(x)$ .... (17)

Искомый интегралъ въ символической формѣ представится въ формѣ (17) или, какъ обыкновенно пишутъ

$$U_x = (D-a)^{-1}\{q(x) + 0\}$$

Выполняя дѣйствіе надъ каждымъ членомъ напишемъ

$$U_x = (D-a)^{-1}q(x) + (D-a)^{-1}\cdot 0 \quad \ldots \quad (18)$$

Таково символическое выраженіе интеграла, его истинное

не символическое выраженіе дается формулой (14), откуда

$$\left.\begin{aligned}(D-a)^{-1}q(x) &= a^{x-1}\sum^{n} a^{-x}q(x)\\ (D-a)^{-1}0 &= a^{x-1}.\,\omega(x)\end{aligned}\right\}\dots\dots(19)$$

Вставивъ эти выраженія въ правую часть формулы(18), мы находимъ равенство(14).

§3. Линейныя разностныя ур-ія $n^{\text{го}}$ порядка съ постоянными коэффиціентами

Этимъ названіемъ обозначаются ур-ія слѣдующаго вида

$$D^nU_x+a_1D^{n-1}U_x+a_2D^{n-2}U_x+\dots a_{n-1}DU_x+a_nU_x=q(x)\dots(1)$$

гдѣ коэф-ты a суть постоянныя числа. Вынесемъ символически U_x въ лѣвой части за скобку

$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\dots a_{n-1}D+a_n)U_x=q(x)\dots\dots(2)$$

Если бы D было количествомъ, а не символомъ дѣйствія, то мы назвали бы выраженіе въ скобкахъ многочленомъ $n^{\text{й}}$ степени и могли бы обозначить его символомъ $f(D)$; введемъ такое обозначеніе и въ нашемъ случаѣ: $f(D)U_x=q(x)\dots$ (3)

Всякій многочленъ $n^{\text{й}}$ степени можно разложить на n линейныхъ множителей по его корнямъ. Сдѣлаемъ это для $f(D)$, равенство наше приметъ видъ:

$$(D-a)(D-b)(D-c)\dots(D-k)(D-l)U_x=q(x)\dots\dots(4)$$

гдѣ $a, b, c\dots k, l$ корни ур-ія $f(z)=0$. Смыслъ равенства(4) такой: если надъ ф-іей U_x послѣдовательно совершить операціи $D-l, D-k,\dots D-b, D-a$, то результатъ долженъ равняться $q(x)$; ищется такая ф-ія U_x, которая этому условію удовлетворяетъ, она то и есть искомый интегралъ.

Изъ совершенно элементарныхъ соображеній слѣдуетъ, что символы $D-a$, $D-b$, $D-c\dots$ можно между собой переставить

какъ угодно. Задачу можно было бы рѣшать такъ. Обозначимъ $(D-b)(D-c)\ldots(D-k)(D-l)U_x = V_x \ldots \ldots (5)$

ур-іе (4) приметъ видъ $(D-a)V_x = q(x) \ldots \ldots (6)$

Это ур-іе такого вида, какъ въ прошломъ §-нѣ; гдѣ него V_x найдется по форм (14) прошлаго §-а; найдя, вносимъ его въ форм (5), V_x станетъ извѣстно. Обозначимъ

$D-c\ldots(D-k)(D-l)U_x = W_x$; ур-іе (5) представится въ видѣ

$(D-b)W_x = V_x$, гдѣ V_x уже извѣстно. Это опять ур-іе такого типа, какъ въ прошломъ §-нѣ; W_x найдется по (14) прошлаго §-а; такъ мы дойдемъ и до U_x, примѣняя n разъ формулу (14) прошлаго §-а. Другой путь рѣшенія той же задачи: на ур-іе (3) можно смотрѣть съ той же точки зрѣнія, какъ въ прошломъ §-нѣ на ур-іе (15); $f(D)$ есть символъ дѣйствія; мы желаемъ подобрать U_x такъ, чтобы результатъ дѣйствія $f(D)$ надъ U_x давалъ бы ф-ію $q(x)$; это и показываетъ форм (3). Какъ и въ прошломъ §-нѣ обозначимъ въ форм(5) черезъ $\overset{-1}{f}(D)$ символъ дѣйствія, обратнаго $f(D)$, т.е. удовлетворяющаго условію $\overset{-1}{f}(D).f(D) = 1 \ldots\ldots (7)$

тогда, совершая такое дѣйствіе надъ обѣими частями ур-іе(3), будемъ имѣть $U_x = \overset{-1}{f}(D)q(x) \ldots\ldots (8)$

и это будетъ интеграломъ. Намъ нужно только найти выраженіе результата дѣйствія $\overset{-1}{f}(D)$. Поступаемъ, какъ въ прошломъ §-нѣ; т.е. ищемъ формулы, подобныя формуламъ (19) прошлаго §-а. Ограничимся тѣмъ случаемъ, когда корни $a, b, c \ldots k, l$ всѣ различны. Возьмемъ выраженіе $\overset{-1}{f}(D)$ и станемъ надъ нимъ разсуждать, какъ будто D символъ количества, а не дѣйствія; тогда выраженіе $\overset{-1}{f}(D)$

можно представить въ видѣ дроби $\frac{1}{f(D)}$ и разложить на простыя дроби по корнямъ знаменателя, она представится въ видѣ

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{A}{D-a} + \frac{B}{D-b} + \dots \frac{\mathcal{L}}{D-l}$$

или $f^{-1}(D) = A(D-a)^{-1} + B(D-b)^{-1} + \dots \mathcal{L}(D-l)^{-1} \dots \dots \quad (9)$

Если бы D было символомъ количества, это было бы тождествомъ. Умноживъ обѣ части равенства (9) на $f(D)$, когда D символъ количества, мы должны получить тождество вида $f(D)f^{-1}(D) = 1 = Af(D)(D-a)^{-1} + Bf(D)(D-b)^{-1} + \dots \mathcal{L}f(D)(D-l)^{-1} \dots (10)$

Если бы D было символомъ количества, то формулы (9) и (10) были бы простыми алгебраическими тождествами. Условимся теперь подъ символомъ $f^{-1}(D)$ подразумѣвать въ рѣшаемой задачѣ именно выраженіе (9), тогда совершая надъ обѣими частями этого равенства дѣйствіе $f(D)$, мы въ правой части можемъ выполнить это дѣйствіе почленно, расположеніе членовъ будетъ такое, какъ въ форм (10), и мы убѣдимся, что дѣйствительно выраженіе (9) удовлетворяетъ требованію (7). Если такъ, то по форм (8) искомый интегралъ представится въ слѣд. видѣ

$$U_x = A(D-a)^{-1}\{q(x)+0\} + B(D-b)^{-1}\{q(x)+0\} + \dots\dots$$
$$+ \mathcal{L}(D-l)^{-1}\{q(x)+0\} \dots\dots\dots \quad (11)$$

гдѣ каждый членъ вычислится по форм (19) прошлаго §-а, такъ что окончательно

$$U_x = Aa^{x-1}\sum a^{-x}q(x) + Bb^{x-1}\sum b^{-x}q(x) + \dots + \mathcal{L}.l^{x-1}\sum l^{-x}q(x)$$
$$+ A\omega_1 a^{x-1} + B\omega_2 b^{x-1} + \dots + \mathcal{L}\omega_n l^{x-1} \dots \quad (12)$$

Это и есть готовая формула интеграла даннаго ур-ія. Въ случаѣ, когда ур-іе не имѣетъ второй части, т. е. когда $q(x) = 0$, въ форм (12) останутся только члены второй строки. Такъ какъ $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ суть произвольныя

ф-іи съ періодамъ 1, то постоянные множители $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{C}{c}$ … $\frac{L}{l}$ можно въ нихъ включить; тогда въ случаѣ, если $q(x)$ равно нулю, формула (12) приметъ видъ

$$U_x = \omega_1 a^x + \omega_2 b^x + \dots + \omega_n l^x \dots \quad (12')$$

Величины $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ суть произвольныя ф-іи съ періодомъ 1, но такъ какъ въ задачахъ разностнаго исчисленія x есть число цѣлое и получается сразу приращеніе на цѣлую единицу, то величины $\omega_1, \omega_2 \dots$ не мѣняются, ихъ можно разсматривать, какъ произвольныя постоянныя.

Задачи.

1) $U_{x+2} - 5U_{x+1} + 6U_x = a^x$. То же ур-іе можно написать такъ $D^2U_x - 5DU_x + 6U_x = a^x$ или $(D^2 - 5D + 6)U_x = a^x$. Коэффиціентъ при U_x разлагаемъ на множители

$$(D-2)(D-3)U_x = a^x; \quad \frac{1}{(D-2)(D-3)} = \frac{A}{D-2} + \frac{B}{D-3};$$

отсюда сравниваніемъ коэф-овъ находимъ $A + B = 0$; $-3A - 2B = 1$, откуда $A = -1$; $B = +1$, слѣдовательно $U_x = (D-3)^{-1}a^x - (D-2)^{-1}a^x$ или по формулѣ (12)

$$U_x = 3^{x-1}\sum\frac{a^x}{3^x} - 2^{x-1}\sum\frac{a^x}{2^x} + \omega_1 3^{x-1} - \omega_2 2^{x-1}$$

Припомнимъ, что $\sum a^x = \frac{a^x}{a-1}$, слѣдовательно

$$\sum\left(\frac{a}{3}\right)^x = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^x}{\frac{a}{3}-1}; \quad \sum\left(\frac{a}{2}\right)^x = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^x}{\frac{a}{2}-1},$$

вставляемъ это въ нашу формулу

$$U_x = \frac{a^x}{a-3} - \frac{a^x}{a-2} + \omega_1 3^{x-1} - \omega_2 2^{x-1}$$

2)* Лебедь къ концу второго года жизни выводитъ трехъ лебедятъ и затѣмъ каждый слѣдующій годъ выводитъ по 4 лебеденка; каждый изъ молодыхъ лебедей слѣдовалъ этому же правилу. Предполагая, что всѣ лебеди остаются живы, найти, сколько будетъ лебедей къ концу x-го года.

Обозначимъ искомое число лебедей черезъ U_x и станемъ разсуждать такъ: въ числѣ этихъ лебедей только что родившихся будетъ $U_x - U_{x-1}$; столько бы только что родившихся; однолѣтокъ было $U_{x-1} - U_{x-2}$, и наконецъ въ возрастѣ двухъ лѣтъ U_{x-2}. Первая изъ этихъ группъ не принесла новыхъ птенцовъ къ концу $x+1$-го года, вторая группа принесла по 3 птенца и 3-я группа по 4 птенца. Къ концу $x+1$-го года численность новаго выводка Якова

$$3(U_{x-1} - U_{x-2}) + 4U_{x-2}$$

Если сюда прибавить число всѣхъ взрослыхъ лебедей, бывшихъ передъ началомъ $x+1$-го года, то сумма покажетъ, сколько всего будетъ лебедей къ концу $x+1$-го года, т.е. мы найдемъ U_{x+1}, такъ что $3(U_{x-1} - U_{x-2}) + 4U_{x-2} + U_x = U_{x+1}$. Перенесемъ всѣ члены составленнаго разностнаго ур-iя вправо и сдѣлаемъ приведенiе

$$U_{x+1} - U_x - 3U_{x-1} - U_{x-2} = 0$$

Замѣнимъ x черезъ $x+2$

$$U_{x+3} - U_{x+2} - 3U_{x+1} - U_x = 0 \text{ или}$$

$$(D^3 - D^2 - 3D - 1)U_x = 0.$$

Корнемъ ур-iя $r^3 - r^2 - 3r - 1 = 0$ будетъ -1; два другiе корня найдутся изъ ур-iя:

$$\frac{r^3 - r^2 - 3r - 1}{r+1} = 0; \quad r^2 - 2r - 1 = 0$$

Итакъ $a = -1$; $b = 1 + \sqrt{2}$; $c = 1 - \sqrt{2}$. Слѣдовательно наше ур-iе напишется такъ

$$(D+1)(D-1+\sqrt{2})(D-1-\sqrt{2})U_x = 0.$$

Въ силу форм (12′) интегралъ этого ур-iя приметъ видъ: $U_x = (-1)^x \omega_1 + (1+\sqrt{2})^x \omega_2 + (1-\sqrt{2})^x \omega_3$.

По смыслу задачи при $x=0$, $U_x=1$,
" $x=1$, $U_x=1$,
" $x=2$, $U_x=4$

отсюда
$$\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 1,$$
$$-\omega_1+(1+\sqrt{2})\omega_2+(1-\sqrt{2})\omega_3 = 1,$$
$$\omega_1+(1+\sqrt{2})^2\omega_2+(1-\sqrt{2})^2\omega_3 = 4$$

Складываемъ 1-е со 2-мъ: $(2+\sqrt{2})\omega_2+(2-\sqrt{2})\omega_3 = 2$,

или $(\sqrt{2}+1)\omega_2+(\sqrt{2}-1)\omega_3 = \sqrt{2}$ .....(α)

Вычитаемъ первое изъ третьяго

$$(2+2\sqrt{2})\omega_2+(2-2\sqrt{2})\omega_3 = 3,$$

или $(1+\sqrt{2})\omega_2+(1-\sqrt{2})\omega_3 = 3/2$ ..... (β)

Складывая ур-іе (α) и (β) имѣемъ
$$2(1+\sqrt{2})\omega_2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$
а вычитая одно изъ другого: $2(\sqrt{2}-1)\omega_3 = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{2}$

Отсюда $\omega_2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$; $\omega_3 = \dfrac{-\sqrt{2}+1}{4}$

Слѣдовательно $\omega_2+\omega_3 = \dfrac{1}{2}$, поэтому $\omega_1 = 1-\omega_2-\omega_3 = \dfrac{1}{2}$

Интегралъ принимаетъ видъ
$$U_x = \frac{1}{2}(-1)^x+\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})^{x+1}+\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})^{x+1}$$

При $x=3$ найдемъ: $U_x = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})^4+\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})^4 = 8$

" $x=4$ " $U_x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})^5+\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})^5 = 21$ и т. д.

Конецъ.